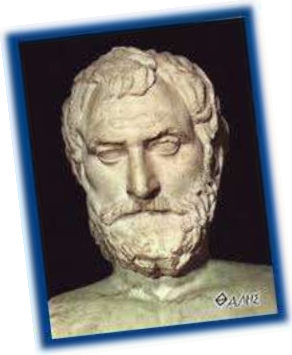
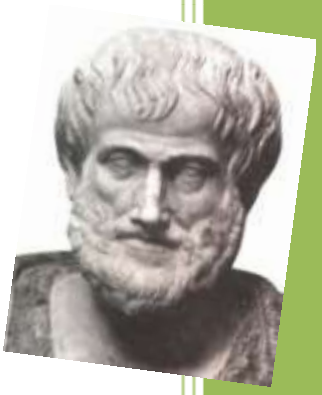
Ερευνητική Εργασία
1ο ΓΕΛ ΠΕΡΑΜΑΤΟΣ

Αρχαίοι Έλληνες Μαθηματικοί





Υπεύθυνοι Καθηγητές
Λ. Μιχαήλ - Απ. Βούλγαρης

Ιανουάριος 2012

Περιεχόμενα

Εισαγωγή....3
ΘΑΛΗΣ Ο ΜΙΛΗΣΙΟΣ (623-624 π.Χ.)....5
1. *ΦΙΛΟΣΟΦΙΑ*....7
2. *ΦΥΣΙΚΗ*....8
3. ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ....8
4. ΑΣΤΡΟΝΟΜΙΑ....10
Πυθαγόρας Ο Σάμιος....11
Ανατροφή....13
Οι Πρώτες Σπουδές στην Ελλάδα....13
Η φυγή προς τον Κρότωνα, Η δράση στην Ιταλία....15
Πυθαγόρειος Σχολή....17
Πυθαγόρειο Θεώρημα....19
Πυθαγόρας και Μουσική....21
ΕΥΔΟΞΟΣ....24
Η ζωή Του Ευδόξου....25
Θεωρία της αναλογίας....25
Μέθοδος της εξάντλησης....27
Αστρονομία....28
ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ....31
Στοιχεία....31
ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ ο ΣΥΡΑΚΟΥΣΙΟΣ....40
Ο ΒΙΟΣ ΤΟΥ ΑΡΧΙΜΗΔΗ....40
Η ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΤΟΥ ΑΡΧΙΜΗΔΗ....42
ΤΟ ΠΑΛΙΜΨΗΣΤΟ ΤΟΥ ΑΡΧΙΜΗΔΗ....44
ΜΗΧΑΝΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΑΝΤΙΚΥΘΗΡΩΝ....44
ΑΤΕΡΜΩΝ ΚΟΧΛΙΑΣ....48
ΕΥΡΗΚΑ !! ΕΥΡΗΚΑ !!....49
ΕΠΙΛΟΓΟΣ....52

Εισαγωγή

Η αρχαία Ελλάδα, κοιτίδα της μαθηματικής σκέψης Ολόκληρος ο δυτικός πολιτισμός γεννήθηκε και αναπτύχθηκε έχοντας ως βάση τον τρόπο σκέψης που χάραξαν, διαμόρφωσαν και δίδαξαν οι αρχαίοι Έλληνες. Για πρώτη φορά στην αρχαία Ελλάδα ο νους δεν ικανοποιείται με τις μυθολογικές ερμηνείες του κόσμου. Ο μελετητής δεν αρκείται να δώσει πρακτικές απαντήσεις στα προβλήματα, αλλά προσπαθεί να επεκταθεί παραπέρα σε όλα τα νοητά αντίστοιχα προβλήματα, να οδηγηθεί σε γενικεύσεις και σε αφαιρέσεις, να οικοδομήσει τον ορθό λόγο για να διατυπώσει με σαφήνεια έννοιες, ορισμούς και νόμους γενικούς. Αυτή η μετάβαση από το μύθο στο λόγο, στην επιστημονική σκέψη, ήταν ένα θαύμα, μια τομή, μια επανάσταση.

Η Φιλοσοφία γεννήθηκε τον 6ο π.Χ. αιώνα στην Ιωνία και η εξάπλωσή της στις υπόλοιπες ελληνικές πόλεις ήταν η απαρχή μιας λαμπρής πορείας του ελληνικού πνεύματος στην αναζήτηση της αλήθειας, όχι για να εξυπηρετήσει πρακτικές ανάγκες, αλλά για να ικανοποιήσει πνευματικές ανησυχίες και αναζητήσεις.
Τα Μαθηματικά ήταν ένα ευρύτατο πεδίο πνευματικής αναζήτησης γι' αυτό ασχολήθηκαν μαζί τους όλοι σχεδόν οι φιλόσοφοι εκείνης της εποχής.

Η απόδειξη, που έπαιξε καθοριστικό ρόλο στην πορεία εξέλιξης των Μαθηματικών, ξεκίνησε από τον **Θαλή**, αναπτύχθηκε από τον **Πυθαγόρα** και τους Πυθαγόρειους, συστηματοποιήθηκε από τον Πλάτωνα και κυρίως από τον **Αριστοτέλη**, χρησιμοποιήθηκε σε περισσότερο τελειοποιημένη μορφή από τον **Ευκλείδη** και θα μπορούσαμε να πούμε ότι τελειοποιήθηκε από τον **Αρχιμήδη**.
Η σύλληψη της ιδέας της **αξιωματικής θεμελίωσης** οφείλεται στους αρχαίους Έλληνες. Κλασικό παράδειγμα είναι η **Ευκλείδεια Γεωμετρία**. Στοιχεία όμως αξιωματικής θεμελίωσης βρίσκουμε και σε άλλα αρχαία ελληνικά κείμενα. Οι Πυθαγόρειοι π.χ. είχαν διευκρινίσει ότι η αποδεικτική

διαδικασία πρέπει να έχει κάποια δεδομένα (τις υποθέσεις), και κάποιους αρχικούς συλλογισμούς. Ο Αριστοτέλης επίσης μας δίνει όλα τα στοιχεία μιας αξιωματικής θεμελίωσης. Αναφέρεται στις αρχικές έννοιες, -τις θέσεις, όπως τις ονομάζει- στους ορισμούς, στα αξιώματα, στην αποδεικτική διαδικασία και στην απόδειξη. Η αξιωματική θεμελίωση που ανέπτυξαν οι αρχαίοι Έλληνες είναι ίδια με εκείνη που χρησιμοποιούμε σήμερα.

Η **Θεωρία Αριθμών** είναι ένας άλλος τομέας που η επινόησή του οφείλεται στους Έλληνες. Για την ανάπτυξη αυτής της θεωρίας σημαντική ήταν η συμβολή των Πυθαγορείων, του Πλάτωνα στην Ακαδημία, καθώς και του Ευκλείδη με το έργο του «Στοιχεία». Καθοριστική ήταν επίσης συμβολή του Αρχιμήδη και του Διόφαντου.

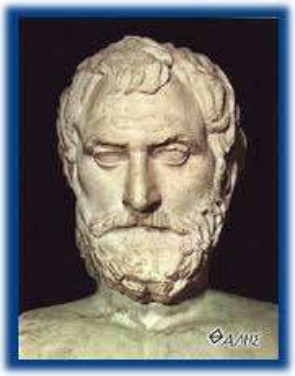
Η **Γεωμετρική Άλγεβρα** είναι ένα από τα κύρια χαρακτηριστικά των αρχαίων ελληνικών Μαθηματικών. Οι Έλληνες έλυναν πολλά προβλήματα της Αριθμητικής με τη βοήθεια της Γεωμετρίας, αλλά και πολλά γεωμετρικά προβλήματα με τη χρησιμοποίηση αριθμητικών υπολογισμών. Υπήρχαν έννοιες που μπορούσαν να θεωρηθούν και αριθμητικές και γεωμετρικές. Π.χ. οι αναλογίες, καθώς και η λύση των εξισώσεων μπορούν να θεωρηθούν ως κοινό μέρος της Αριθμητικής και της Γεωμετρίας.

Η **Ανάλυση**, που είναι σήμερα ο σημαντικότερος κλάδος των βασικών Μαθηματικών, έχει την αφετηρία της στην αρχαία Ελλάδα. Π.χ. ο Δημόκριτος καθόρισε την έννοια του απειροστού μεγέθους και έκαμε διάκριση μεταξύ φυσικού απειροστού (άτομο) και μαθηματικού απειροστού. Στον Πλάτωνα και στον Αριστοτέλη υπάρχει η έννοια του απείρου και του συνεχούς μεγέθους. Τα παράδοξα του Ζήνωνα περιέχουν την έννοια του ορίου, της συνέχειας, καθώς και του αθροίσματος των απείρων όρων μιας ακολουθίας. Στα έργα των Πυθαγορείων, του Εύδοξου και του Αρχιμήδη υπάρχουν τόσα και τέτοια στοιχεία μαθηματικής Ανάλυσης, ώστε τα έργα αυτά σήμερα θεωρούνται ως οι πρωτοπόροι της δημιουργίας

του διαφορικού και του ολοκληρωτικού λογισμού. Η Γεωμετρία είναι καθαρά ελληνική επιστήμη. Ο Ευκλείδης με τα Στοιχεία του οδηγεί τον τρόπο σκέψης της ανθρωπότητας για 2.300 χρόνια.

Η **Αστρονομία** ως επιστήμη βρήκε επίσης πρόσφορο έδαφος ανάπτυξης στην αρχαία Ελλάδα. Ο Θαλής, ο Πυθαγόρας και οι Πυθαγόρειοι είχαν κάνει αρκετές αστρονομικές παρατηρήσεις και μετρήσεις. Είναι γνωστή η θεωρία του Αρίσταρχου του Σαμίου για τις κινήσεις της Γης. Ο Αρχιμήδης κατασκεύασε αρκετά αστρονομικά όργανα, με τα οποία υπολόγιζε το μέγεθος της Γης, της Σελήνης και του Ηλίου, την απόσταση της Γης από τον Ήλιο και τους πλανήτες, το μήκος της τροχιάς της Γης κ.λπ. Το έργο του Πτολεμαίου και του Ίππαρχου υπήρξε πηγή αναφοράς για όλους τους μεταγενέστερους αστρονόμους. Έτσι, η αρχαία Ελλάδα υπήρξε η κοιτίδα όχι μόνο της μαθηματικής σκέψης αλλά και της επιστημονικής σκέψης γενικότερα.
Είναι γνωστό ότι η Αρχαία Ελλάδα έβαλε τα θεμέλια των μαθηματικών Επιστημών και ειδικά στον τομέα της **Γεωμετρίας** και της **Λογικής.** Τα έργα των αρχαίων Ελλήνων Μαθηματικών όσα βέβαια διασώθηκαν αποτέλεσαν την βάση για την πιο πέρα εξέλιξη των μαθηματικών Επιστημών. Ονόματα όπως **Ευκλείδης , Αρχιμήδης, Πυθαγόρας, Θαλής** έγιναν αντικείμενο μελέτης της ιστορίας των Μαθηματικών.

ΘΑΛΗΣ Ο ΜΙΛΗΣΙΟΣ (623-624 π.Χ.)



Ο Θαλής ο Μιλήσιος γεννήθηκε 623 – 624 π.Χ στη Μίλητο και υπήρξε ιδρυτής της Σχολής της Μιλήτου. Ήταν γιος του Εξαμύου και της Κλεοβουλίνης. Λέγεται ότι οι προγονικές του ρίζες εκτείνονται ως την οικογένεια του Κάδμου του βασιλιά της Θήβας.

Πληροφορίες λένε ότι δεν σπούδασε σε καμία σχολή ούτε μαθήτευσε σε κανένα δάσκαλο. Σε όλη τη διάρκεια της ζωής του παρέμεινε άγαμος και αφοσιωμένος στην θεωρητική και πρακτική ενασχόληση με την αστρονομία, τα μαθηματικά, τη φυσική και την φιλοσοφία. Λένε πως κάποτε υπολόγισε το ύψος μιας πυραμίδας στην Αίγυπτο μετρώντας τον ίσκιο της την στιγμή ακριβώς που ο δικός του ίσκιος ήταν ίσος με το πραγματικό του ύψος.

Ο Θαλής ήταν **ένας από τους επτά σοφούς της αρχαιότητας** και θεωρείται Πατέρας της Ελληνικής φιλοσοφίας διότι πρώτος έθεσε το πρόβλημα μιας γενικής αρχής όλων των πραγμάτων.

Ο Θαλής δεν ήταν μόνο μεγάλος επιστήμονας και φιλόσοφος, αλλά και σπουδαίος πολιτικός, καθώς συμβούλευε συνεχώς τους Ίωνες της Μικράς Ασίας να καθορίσουν μια κοινή πρωτεύουσα (την Τέω), για να έχουν ομόνοια και να είναι ισχυροί.

Όταν ο Κροίσος ζητούσε τη συμμαχία της Μιλήτου εναντίον των Περσών, ο Θαλής το απέτρεψε και όταν οι Πέρσες νίκησαν τον Κροίσο, η Μίλητος σώθηκε χάρη στη συμβουλή του Θαλή.

Ο Θαλής πέθανε το 546 π.Χ., σύμφωνα με τους ισχυρισμούς του Απολλόδωρου, σε ηλικία 78 ετών παρακολουθώντας Αθλητικούς αγώνες, εξαιτίας της ζέστης, της δίψας και της εξάντλησης.

Στον τάφο του χαράχτηκε το εξής επίγραμμα:

«Αυτός ο μικρός τάφος, είναι του Θαλή του εξαίρετου, που η δόξα έφτανε ως τα Ουράνια».

Προσωκρατικός φιλόσοφος : Περιλήφθηκε στους <<Επτά Σοφούς»της αρχαιότητας. Γεννήθηκε στη Μίλητο της Μ. Ασίας μεταξύ 625-640 π.Χ . Καταγόταν από αριστοκρατική οικογένεια. Λέγεται ότι οι προγονικές ρίζες του εκτείνονται ως την

οικογένεια του Κάδμου, του βασιλιά της Θήβας. Πληροφορίες λένε ότι δεν σπούδασε σε καμία σχολή ούτε μαθήτευσε σε κανένα δάσκαλο. Μόνο όταν ταξίδεψε στην Αίγυπτο και στην Βαβυλώνα, γνωρίζοντας από κοντά τους αρχαίους πολιτισμούς των λαών. Συναναστράφηκε με διάφορους ιερείς – σοφούς της Αιγύπτου. Σε όλη τη διάρκεια της ζωής του παρέμεινε άγαμος και αφοσιωμένος στην θεωρητική και πρακτική ενασχόληση με τη φιλοσοφία και τις άλλες επιστήμες. Ήταν μια πολύπλευρη προσωπικότητα . Ασχολήθηκε με την αστρονομία και τα μαθηματικά , τη φυσική και την φιλοσοφία . Για τα επιστημονικά του επιτεύγματα λέγονται πολλά και είναι δύσκολο να ξεχωρίσει κανείς πόσα από αυτά δεν οφείλονται στον θρύλο που δημιουργήθηκε γύρω από την προσωπικότητά του. Αναδείχτηκε σε οξυδερκή διανοητική και πολιτική προσωπικότητα. Σε καίριες στιγμές παρενέβη στα πολιτικά πράγματα, όπως όταν συνέστησε στους Μιλήσιους να μη συμμαχήσουν με τον Κροίσο ή όταν συμβούλευσε τις ιωνικές πόλεις να συμμαχήσουν μεταξύ τους για να αντιμετωπίσουν τους κοινούς πιθανούς εχθρούς .

ΕΡΓΟ :

1. ***ΦΙΛΟΣΟΦΙΑ*** Ο Θαλής ήταν ιδρυτής της Ιωνικής σχολής, που θεωρείται μια εμβρυώδης μορφή υλιστικής σχολής . Οι φιλόσοφοι που τη συγκροτούσαν, υποστήριζαν το Θαλή, υποστήριζαν ότι η φύση αποτελείται από ύλη που βρίσκεται σε αέναη κίνηση. Πρώτος ο Θαλής αναζήτησε την αρχή των όντων όχι στο Θεό, αλλά σε κάποιο φυσικό είδος. Απέδωσε τη βάση όλων των πραγμάτων στο νερό, επειδή , ίσως ,παρατήρησε ότι η ζωή όλων των όντων εξαρτάται από αυτό – είτε επειδή προέρχονται από αυτό είτε επειδή ζουν και αναπτύσσονται σε υγρό περιβάλλον- και κατέληξε στο συμπέρασμα ότι

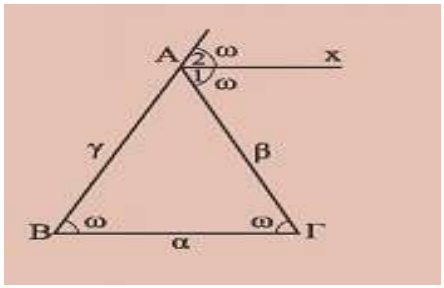
όλες οι ουσίες θα μεταβληθούν σε νερό. Απέδωσε στη φύση μια γενεσιουργό δύναμη ,γιατί (σύμφωνα με την θεωρία του) από αυτή γεννιούνται και βλασταίνουν τα όντα. Βέβαια η θεωρητική του προσέγγιση στη φύση δεν αποτέλεσε μια υλιστική θεώρηση των πραγμάτων, αλλά απλά μια συμβολική ερμηνεία της κοσμογονικής αρχής. Η ψυχή στο Θαλή διακατέχεται από μια αυτοκινητική και αεικίνητη δύναμη – ιδιότητα και βρίσκει υπόσταση σε όλα τα όντα, ακόμα και τα άψυχα. Οι περισσότερες πληροφορίες για το *έργο του Θαλή έχουν διασωθεί από τον Αριστοτέλη.*

2. ***ΦΥΣΙΚΗ*** *Με την παρατήρηση ότι το ήλεκτρο (κεχριμπάρι)* όταν τρίβεται σπάνω σε μάλλινο ρούχο, αποκτά την ιδιότητα να έλκει τρίχες μικρά φτερά κ.λ.π , ο Θαλής έθεσε τα θεμέλια του ηλεκτρισμού. Αρκετούς αιώνες μετά η παραγωγή ηλεκτρισμού με τη χρήση της τριβής πραγματοποιήθηκε με τη βοήθεια των ηλεκτροστατικών μηχανών. Στο Θαλή οφείλετε και η ανακάλυψη του μαγνητισμού . Είναι ο πρώτος που παρατήρησε ότι ο μαγνήτης (Fe 0) ή επιτεταρτοξείδιο του σιδήρου ασκεί ελκτικές δυνάμεις σε σιδερένια αντικείμενα. Οι ανακαλύψεις των ηλεκτρικών και μαγνητικών ιδιοτήτων ορισμένων υλικών, ώθησαν το Θαλή στη διατύπωση της θεωρίας ότι καθετί που υπάρχει στην φύση έχει ψυχή. Από την εξήγηση που έδωσε ότι οι ετήσιες βροχές (μελτέμια) προκαλούν τις πλημμύρες του ποταμού Νείλου, πιθανολογείται ότι πρέπει να ασχολήθηκε και με τη μελέτη μετεωρολογικών φαινομένων , χωρίς όμως να σωθούν οι παρατηρήσεις και οι μελέτες που έκανε.

3. ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

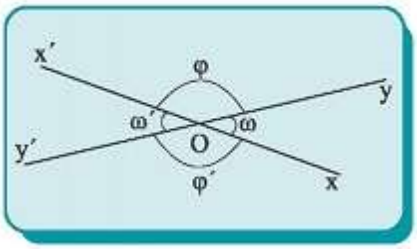
Η κυριότερη προσφορά του Θαλή στην επιστήμη αυτή ήταν η **εισαγωγή της αποδείξεως**, γεγονός που έφερε αλλαγή στον τρόπο του «**σκέπτεσθαι**» μέχρι εκείνη την εποχή.

Μερικά θεωρήματα τα οποία απέδειξε ο Θαλής στη γεωμετρία είναι τα εξής



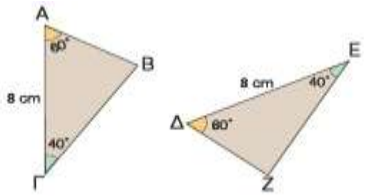
α) Η διάμετρος ενός κύκλου τον χωρίζει σε δύο ίσα μέρη.

β) Στα ισοσκελή τρίγωνα οι παρά τη βάση γωνίες είναι ίσες



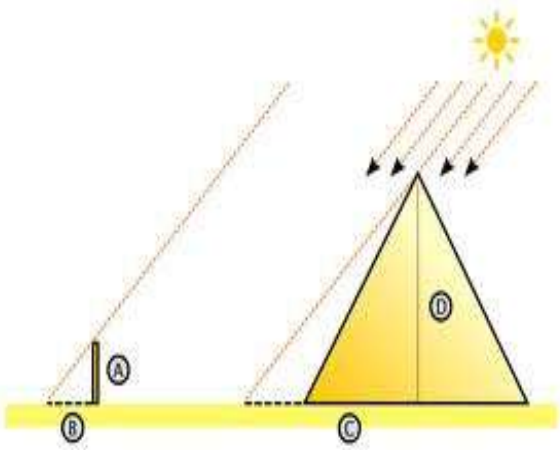
γ) Οι κατά κορυφήν γωνίες είναι ίσες.

δ) Η εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο είναι ορθή.



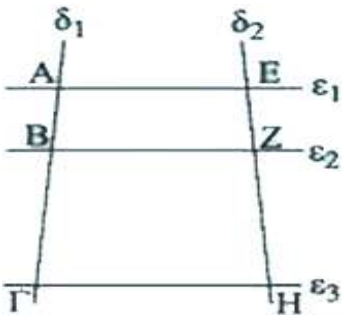
ε) Δύο τρίγωνα είναι ίσα, όταν έχουν μια πλευρά και τις προσκείμενες σε αυτήν γωνίες ίσες.

στ) Διάφορα θεωρήματα για τα όμοια τρίγωνα.

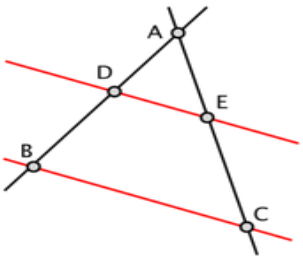


Χρησιμοποιώντας την αναλογία που ισχύει μεταξύ των πλευρών δύο όμοιων τριγώνων, κατόρθωσε να υπολογίσει το ύψος των πυραμίδων από το μήκος της σκιάς τους και της σκιάς μιας ράβδου που έμπηγε σε έδαφος, κερδίζοντας έτσι τον θαυμασμό του βασιλιά της Αιγύπτου Άμασι

ΘΕΩΡΗΜΑ ΘΑΛΗ



Όταν οι παράλληλες ευθείες τέμνουν δύο άλλες ευθείες, τότε τα τμήματα που ορίζονται στη μία είναι ανάλογα προς τα αντίστοιχα τμήματα της άλλης.



Κάθε παράλληλη προς μια πλευρά τριγώνου χωρίζει τις άλλες πλευρές του, σε ίσους λόγους. Όμως ισχύει και το αντίστροφο αν σε ένα τρίγωνο μια ευθεία χωρίζει σε ίσους λόγους τις δυο πλευρές, τότε είναι παράλληλη στην τρίτη πλευρά

4. ΑΣΤΡΟΝΟΜΙΑ

Ως αστρονόμος έκανε αξιόλογες για την εποχή του παρατηρήσεις. Διατύπωσε ότι η Σελήνη είναι ετερόφωτο και όχι αυτόφωτο σώμα. Προσδιόρισε με μεγάλη ακρίβεια την έκλειψη του Ηλίου που συνέβη στις 28 Μαίου 585 π.Χ.

Υπολόγισε το λόγο της διαμέτρου του Ήλιου προς την φαινόμενη τροχιά του γύρω από τη Γη, καθώς και της διαμέτρου της Σελήνης προς την τροχιά της γύρω από την Γη και τους βρήκε 1/720. Βρήκε ότι ο χρόνος έχει διάρκεια 365 ημέρες και οι εποχές του έχουν ανισομερής χρονική διάρκεια. Διατύπωσε επίσης την άποψη ότι το σχήμα της Γης είναι σφαιρικό, καθώς και ότι τα άστρα αποτελούνται από τα ίδια συστατικά με τη Γη.

Πυθαγόρας Ο Σάμιος

Ο Βίος Του Πυθαγόρα

Παιδικά Χρόνια

Οι περισσότεροι αρχαίοι συγγραφείς συμφωνούν πως είναι γιος του Μνησάρχου, διαφωνούν όμως ως προς την καταγωγή του Μνησάρχου, γιατί άλλοι μεν λένε ότι ήταν Σάμιος, ενώ ο Νεάνθης στο Ε' βιβλίο των "Μυθικών" γράφει πως ήταν Σύρος, από την Τύρο της Συρίας. Κατά την εκδοχή αυτή, ο Μνήσαρχος έφθασε στη Σάμο με σκοπό το εμπόριο, όταν οι Σάμιοι είχαν έλλειψη σιταριού, και αφού προσέφερε για πώληση σιτάρι, ετιμήθη από την πολιτεία κι έγινε πολίτης της Σάμου. Επειδή από παιδί ο Πυθαγόρας έδειχνε πως ήταν ικανός για κάθε σπουδή, ο Μνήσαρχος τον οδήγησε στην Τύρο και φρόντισε να μυηθεί στις διδασκαλίες των Χαλδαίων. Από εκεί ο Πυθαγόρας ήρθε ξανά στην Ιωνία και συναναστράφηκε αρχικά με τον Φερεκύδη από τη Σύο κι έπειτα με τον Ερμοδάμαντα τον Κρεοφύλειο από την Σάμο. Όταν δε ο Μνήσαρχος απέπλευσε προς την Ιταλία, πήρε μαζί του τον νεαρό Πυθαγόρα στην Ιταλία, σύμφωνα με την εκδοχή του Νεάνθη.

Όμως, η επικρατέστερη εκδοχή μεταξύ των αρχαίων συγγραφέων, που παραδίδουν οι Απολλώνιος στο "Περί Πυθαγόρου", Πορφύριος στο "Πυθαγόρου Βίος" και Ιάμβλιχος στο "Περί του Πυθαγορείου βίου" θέλει τον Μνήσαρχο όχι μόνον Σάμιο αλλά και απόγονο του Αγκαίου, του πρώτου αποικιστή της Σάμου. Λέγεται λοιπόν ότι ο Μνήσαρχος και η Πυθαΐς, οι γονείς του Πυθαγόρα, προέρχονταν από τον οίκο και την γενιά που δημιουργήθηκε από τον Αγκαίο, τον ιδρυτή

της αποικίας της Σάμου. Επειδή δε η ευγενική αυτή καταγωγή θρυλείτο μεταξύ των συμπολιτών του Πυθαγόρα, κάποιος Σάμιος ποιητής ισχυρίζεται ότι ο Πυθαγόρας ήταν γιος του Απόλλωνα και αναφέρει τα εξής σχετικά:

"Τον Πυθαγόρα, που εγέννησε από τον Απόλλωνα τον φίλο του Διός, η Πυθαΐς, η ομορφότερη μεταξύ των Σαμίων".

Η φήμη αυτή επικράτησε για τον εξής λόγο: Όταν ο Μνήσαρχος βρέθηκε στους Δελφούς για εμπορικούς λόγους, μαζί με την γυναίκα του που δε γνώριζε ακόμη ότι ήταν έγκυος, ζήτησε χρησμό από την Πυθία σχετικά με το επικείμενο ταξίδι του προς την Συρία. Η Πυθία χρησμοδότησε ότι αυτός μεν θα δοκιμάσει μεγάλη ευχαρίστηση και θα αποκτήσει πολλά χρήματα, η δε γυναίκα του ότι εγκυμονεί ήδη και πως θα γεννήσει παιδί που θα διαφέρει κατά την ωραιότητα και τη σοφία από όλους τους ανθρώπους και θα καταστεί πάρα πολύ ωφέλιμο στο ανθρώπινο γένος. Ο Μνήσαρχος κατανοώντας πως κάτι σπουδαίο και θεόσταλτο θα προέκυπτε, μετονόμασε μάλιστα την γυναίκα του από Παρθενίδα σε Πυθαΐδα μετά το χρησμό. Κατόπιν επιχείρησε το ταξίδι που σχεδίαζε έχοντας λάβει τόσο ευνοϊκή προτροπή, με αποτέλεσμα όσο βρισκόταν στην φοινικική Σιδόνα να γεννήσει η Πυθαΐδα το γιο τους. Ο Μνήσαρχος ονόμασε το νεογέννητο Πυθαγόρα καθώς είχε προφητευτεί από τον Πύθιο Απόλλωνα.

Πράγματι ήταν γεγονός αδιαμφισβήτητο από τους αρχαίους ότι η ψυχή του Πυθαγόρα είχε αποσταλεί από την ανώτατη αρχή του Απόλλωνα, είτε επειδή ήταν συναφής είτε κατ' άλλον τρόπο συνδεδεμένη με τον θεό. Η ίδια του η γέννηση και η ποικίλη σοφία της ψυχής του το αποδείκνυαν ολοφάνερα.

Ανατροφή

Όταν ο Μνήσαρχος επέστρεψε στη Σάμο με πολλά κέρδη και μεγάλη περιουσία, έχτισε ιερό του Πύθιου Απόλλωνα και πρόσεξε ιδιαίτερα την ανατροφή του παιδιού του, αναθέτοντάς την παράλληλα πότε στον Κρεώφυλο, πότε στον Φερεκύδη από τη Σύρο καθώς επίσης και σε ιερείς.

Ο νεαρός Πυθαγόρας μεγάλωνε με μεγάλη σεμνότητα και σωφροσύνη και έγινε όμορφος στην εμφάνιση πολύ περισσότερο από άλλους νέους. Απελάμβανε δε κάθε είδους σεβασμό ακόμη και από τους πολύ μεγαλύτερούς του σε ηλικία πολίτες. Όταν ομιλούσε μετέστρεφε τους πάντες με το μέρος του και εφαίνετο αξιοθαύμαστος ώστε από τους πολλούς να βεβαιώνεται με κάθε φυσικότητα πώς ήταν πράγματι υιός του θεού Απόλλωνος. Ενθαρρυνόμενος από τις σχετικές αυτές δοξασίες και την παιδεία που έλαβε από βρέφος και από τη φυσική του ομορφιά, ακόμη περισσότερο κατέβαλλε προσπάθεια να αποδεικνύει τον εαυτό του άξιο των προτερημάτων που τον διεκοσμούσαν. Όλα όσα έλεγε ή έπραττε τα έκανε με μειλιχιότητα, δίχως να κυριεύεται ούτε από οργή, ούτε από ζήλεια, ούτε από εριστικότητα ούτε από άλλη διαταραχή ή επιπολαιότητα. Μεγάλη θρησκευτικότητα χαρακτήριζε τη συμπεριφορά του και ακολουθούσε ιδιαίτερα σημαντικές δίαιτες, με ισορροπία ψυχής και εγκράτεια σώματος.

Οι Πρώτες Σπουδές στην Ελλάδα

Ο νεαρός Πυθαγόρας έχοντας βελτιώσει τις διατροφικές του συνήθειες κοντά στον Θαλή, χρησιμοποιώντας με άριστο μέτρο ελαφρές και ευκολοχώνευτες τροφές, δίχως υπερβολές στην οινοποσία, απέκτησε πολύ καλή υγεία, την ικανότητα να κοιμάται λίγο καθώς και διαύγεια και καθαρότητα ψυχής. Ακολουθώντας την προτροπή του διδασκάλου του, απέπλευσε προς την Σιδώνα θεωρώντας πως από εκεί θα μετέβαινε ευκολότερα προς την Αίγυπτο. Εκεί συνάντησε τους απογόνους του Μώχου, του φυσιολόγου-μάντη, και τους άλλους

ιεροφάντες της Φοινίκης και μυήθηκε στα ιερά μυστήρια της Βύβλου και της Τύρου και εις τις τελετουργίες που ιερουργούνται σε πολλά μέρη της Συρίας. Όχι από λόγους δεισιδαιμονίας αλλά από μεγάλη επιθυμία και όρεξη για μάθηση, για να μην του διαφύγει κάτι αξιοσπούδαστο που υποκρύπτεται στα απόρρητα μυστήρια των Θεών και στις ιερές τελετές. Εκεί έμαθε πως τα περισσότερα τελετουργικά στοιχεία είναι "άποικα", δηλαδή προέρχονται από αλλού και ότι κατάγονται από τα ιερά της Αιγύπτου. Έτσι, αποφάσισε να διαπλεύσει προς την Αίγυπτο ελπίζοντας ότι εκεί θα μετάσχει σε μυστήρια θειότερα και γνησιότερα.

Ο Ιάμβλιχος διηγείται πως κατά το ταξίδι οι αιγύπτιοι ναύτες είχαν σκεφθεί να τον πουλήσουν διότι πίστευαν πως θα βγάλουν μεγάλο κέρδος από την πώληση ενός τέτοιου νέου, όμως εντός ολίγων ημερών άλλαξαν γνώμη βλέποντας την ασυνήθιστα ήρεμη και επιβλητική συμπεριφορά του Πυθαγόρα, καθώς και την μεγάλη του ικανότητα εγκράτειας στην τροφή, το ποτό και τον ύπνο. Επιπλέον, το πλοίο φαινόταν να προχωρεί με ευθύτητα και ομαλά, σαν να παραστεκόταν κάποιος θεός. Έτσι οι ναύτες πίστεψαν πώς είναι θείος δαίμονας και διήνυσαν το υπόλοιπο ταξίδι με ευχάριστη διάθεση, συμπεριφερόμενοι σεμνότερα προς τον φιλόσοφο, ώσπου το πλοίο έφθασε στα παράλια της Αιγύπτου δίχως να συναντήσει τρικυμία.

Αυτή την εκδοχή παραδίδει ο Ιάμβλιχος, ο Πορφύριος όμως γράφει ότι ο Πυθαγόρας για να μεταβεί εις την Αίγυπτο εξασφάλισε συστατικές επιστολές από τον τύραννο της Σάμου Πολυκράτη για τον βασιλέα της Αιγύπτου Άμασι με τον οποίο ο Πολυκράτης συνδεόταν με δεσμούς φιλοξενίας, ώστε να μπορέσει να γίνει δεκτός από τους Αιγύπτιους ιερείς για να διδαχθεί.

Όπως και να έχει, φαίνεται πως πρώτα ήλθε εις την Ηλιούπολη και από εκεί ταξίδεψε προς την Μέμφιδα και κατόπιν έφθασε εις την Διόσπολη. Οι αιγύπτιοι ιερείς για να δοκιμάσουν την αντοχή του τον υπέβαλλαν σε δύσκολα

προστάγματα εντελώς αντίθετα με την ελληνική αγωγή, νομίζοντας ότι ως ξένος δεν θα τα κατάφερνε στην σκληρή αιγυπτιακή ιερατική εκπαίδευση. Όμως ο Πυθαγόρας επιτέλεσε όλα τα προστάγματα με μεγάλη προθυμία και τόσο πολύ θαυμάστηκε που έλαβε την άδεια να θυσιάζει στους Θεούς και να παίρνει μέρος στις φροντίδες γι'αυτούς, προνόμιο που δεν αναφέρεται να παραχωρήθηκε σε κανέναν άλλο ξένο. Εκεί εντρύφησε ακόμη περισσότερο στη γεωμετρία και την αστρονομία τελειοποιώντας τις γνώσεις του κι έφθασε στο απόγειο της μάθησης της επιστήμης των αριθμών και της μουσικής.

Σύμφωνα με τον Ιάμβλιχο ο Πυθαγόρας έμεινε 22 χρόνια στην Αίγυπτο και κατόπιν μεταφέρθηκε στη Βαβυλώνα, αιχμάλωτος από τους στρατιώτες του Καμβύση και ότι εκεί πέρασε ευχάριστα, συναναστρεφόμενος τους Μάγους, δηλαδή τους Πέρσες ιερείς και διδασκόμενος θεολογικά και αστρονομικά θέματα για άλλα δώδεκα έτη, επιστρέφοντας στη Σάμο άγων ήδη το πεντηκοστό έκτο έτος της ηλικίας του. Ο Πορφύριος όμως παραλαμβάνοντας την πληροφορία από τον Αριστόξενο αναφέρει πως ήταν περίπου 40 ετών όταν έφυγε από τη Σάμο για την Ιταλία.

Η φυγή προς τον Κρότωνα, Η δράση στην Ιταλία

Ο Κρότων υπήρξε αρχαία ελληνική αποικία στην ανατολική ακτή της Καλαβρίας, στις εκβολές του ποταμού Αισάρου, που ιδρύθηκε περίπου το 710 π.Χ από Αχαιούς. Αφού κυρίευσε την προς βορειοδυτικά ορεινή χώρα και τα χαλκωρυχεία του κόλπου της Τερίνης, ίδρυσε μικρό κράτος εκτεινόμενο από την Αδριατική ως την Τυρρηνική Θάλασσα.

Όταν έφθασε στην Ιταλία, πήγε πρώτα στον Κρότωνα, όπου έκανε μεγάλη εντύπωση στους εκεί κατοίκους. Ήταν ένας άνδρας με μακρόχρονες περιπλανήσεις και εξαιρετικός από την ίδια του τη φύση, καλά προικισμένος από την τύχη, φιλελεύθερος στα φρονήματα και μεγάλος, με πολλή χάρη και ευπρέπεια στον λόγο και στο ήθος και σε όλα τα άλλα, με αποτέλεσμα να γοητεύσει τους ανώτατους άρχοντες της πόλεως. Και αφού είπε πολλά καλά, κατά διαταγή των αρχόντων άρχισε να συμβουλεύει τους νέους. Μετά απ' αυτά, οι νέοι προσέρχονταν αθρόα κοντά στον Πυθαγόρα και ύστερα οι γυναίκες και έτσι **ιδρύθηκε από αυτόν σύλλογος γυναικών**. Η φήμη του μεγάλωσε ακόμη περισσότερο και απέκτησε πολλούς οπαδούς ακόμη και βασιλείς και δυνάστες από την γειτονική βάρβαρη χώρα. Εκείνα που έλεγε στους μαθητές του ("συνόντας") δεν είναι γνωστά με βεβαιότητα διότι υπήρχε σκόπιμη σιωπή. Κυρίως γινόταν γνωστά σε όλους πρώτον ότι η ψυχή είναι αθάνατη και έπειτα ότι η ψυχή μεταβιβάζεται σε άλλα γένη ζώων (μετενσάρκωση). Επίσης δίδασκε ότι σε μερικές περιόδους εμφανίζονται πάλι εκείνα που υπήρξαν κάποτε, τίποτε νέο δεν υπάρχει και ότι όλα όσα γίνονται έμψυχα πρέπει να τα θεωρούμε σαν ομογενή. Αναφέρεται πως πρώτος ο Πυθαγόρας έφερε στην Ελλάδα αυτά τα δόγματα.

Με την πρώτη του δημόσια ομιλία, ενώπιον του δήμου μετέστρεψε τους πάντες υπέρ του και όπως παραδίδει ο Νικόμαχος περισσότεροι από δύο χιλιάδες παρακολούθησαν τους λόγους του. Γοητεύτηκαν δε τόσο που δεν επέστρεψαν στις ιδιαίτερες πατρίδες τους αλλά μαζί με τα παιδιά και τις γυναίκες τους έκτισαν ένα τεράστιο οίκημα ομαδικής ακροάσεως, το **Ομακοείον** και ίδρυσαν την ονομαζόμενη απ' όλους **Μεγάλη Ελλάδα στην Ιταλία**, γινόμενοι πολίτες της. Και αφού αποδέχθηκαν ορισμένους Νόμους και παραγγέλματα απ' αυτόν σαν να ήταν θείες υποθήκες έξω από τις οποίες τίποτε δεν έκαναν, παρέμειναν με ομόνοια μαζί με το σύνολο των μαθητών επευφημούμενοι και μακαριζόμενοι από όλους τους γύρω των. Τις δε περιουσίες τους έθεταν σε κοινή χρήση και συγκατέλεγαν τον Πυθαγόρα μεταξύ των Θεών.

Πυθαγόρειος Σχολή

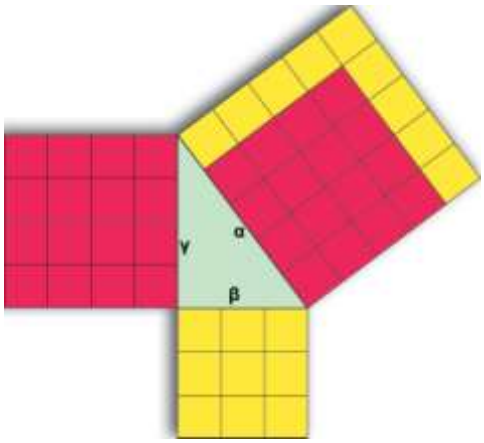
Ο Πυθαγόρας κατά την διαμονή του στον Κρότωνα οπού έλαβε χώρα και το μεγαλύτερο μέρος της διδασκαλίας του δημιούργησε την Πυθαγόρειο Σχολή. Η Πυθαγόρειος Σχολή θεωρείται μία από τις σπουδαιότερες φιλοσοφικές σχολές της Αρχαίας Ελλάδος. Έζησε πάνω από δέκα αιώνες, με περιόδους εξαιρετικής ακμής και περιόδους καταπτώσεως. Μεταξύ των μαθητών αναφέρονται οι Κέρκωψ, Πέτρων, Ίππασος, Έκφαντος, Βροντίνος, ο αστρονόμος Φιλόλαος (εισηγητής του μη γεωκεντρικού συστήματος),ο ιατρός Αλκμαίων,ο Αρχύτας ο Ταραντινός κ.α. Μερικοί από τους πυθαγόρειους μετα την συντριβή της εταιρείας στον Κρότωνα έφυγαν στην κυρίως Ελλάδα. Έτσι φτάνουμε στην εποχή του Πλάτωνα με τον οποίο σταματά η ιστορία του αρχαίου Πυθαγορισμού. Η παράδοση της σχολής όμως δεν έσβησε… κατά τον 1ο με 2ο αιώνα μ.Χ παρουσιάζεται αναγέννηση της σχολής με νεοπυθαγορείους όπως ο Νιγίδιος Φίγουλος, ο Μοδεράτος από τα Γάδειρα, ο Απολλώνιος ο Τυανεύς κ.α.

Η πρώτη πυθαγόρειος κοινότητα παρουσιάζεται ως οργάνωση θρησκευτική, πολιτική και επιστημονική στην οποία έμπαινε κανείς έπειτα από αυστηρή δοκιμασία και ξεχωριστό ρόλο έπαιζε η σιωπή που επιβαλλόταν στους κατηχουμένους. Οι οπαδοί έπρεπε να κρατούν το μυστικό και η κοινολόγηση των θεωριών της σχολής μπορούσε να κοστίσει την ίδια τους τη ζωή όπως λέγεται ότι συνέβη στον Ίππασο (στον οποίον η παράδοση αποδίδει την ανακάλυψη της έννοιας των ασύμμετρων μεγεθών) που κρίθηκε ένοχος για την αποκάλυψη ενός μαθηματικού μυστικού. Στην σχολή επικρατούσε η κοινοκτημωσύνη των αγαθών, η αγαμία και η σειρά εντολών που αποτελούσαν αληθινή «κατήχης» στην πυθαγόρεια ζωή (αποχή από τα όσπρια, το κρέας, τα μάλλινα ενδύματα, συγκομιδή μόνο εκείνων που έπεφταν στην γη, κατάρτιση ημερησίου προγράμματος κάθε πρωί, έλεγχος συνείδησης το βράδυ κλπ). Έκτος από τις εντολές αυτές, υπήρχε και μια σειρά ερωτημάτων , οι απαντήσεις των οποίων ήταν ειδικές αλήθεις που ονομαζόταν **ακούσματα** (π.χ «ποιο πράγμα είναι το

σοφότερο?» «Οι αριθμοί»). Τώρα ξέρουμε ότι μέσα στην σχολή υπήρχε διάκριση μεταξύ **«ακουσματικών»** και **«μαθηματικών»** που φαίνεται διαφορετική από τη διάκριση «εξωτερικών» ή μη κατηχουμένων και «εσωτερικών» ή μυημένων πιθανότατα η πρώτη μαρτυρεί τη διάκριση που κάποια ορισμένη στιγμή έπρεπε να γίνει μεταξύ των ανθρώπων της πίστεως που δεσμευόταν για ότι υπήρχε θρησκευτικό, μυητικό και μυστικό στην σχολή και των ανθρώπων της επιστήμης, που είχαν την τάση να βγαίνουν από την μυστικιστική τους σιωπή και να δικαιολογούν λογικά τις γνώσεις τους.

Η βασική θεωρία της σχολής συνίστατο στην βεβαίωση ότι η ουσία των πραγμάτων κρυβόταν στους αριθμούς. *Παραδείγματος χάρη το 1 είναι η νόηση, το 2 είναι η γνώμη, το 4 ή το 9 (τετράγωνα του πρώτου αρτίου και πρώτου περιττού) η δικαιοσύνη, το 5 είναι ο γάμος (ένωση του πρώτου άρτιου και πρώτου περιττού) και ιδιαίτερα σημαντικό είναι το 10, η «μυστικιστική δεκάδα» στην οποία ορκίζονταν οι πυθαγόρειοι και στο οποίο περιλαμβάνονται ο πρώτος «αρτιοπεριττός» , η μονάδα , ο πρώτος άρτιος, ο πρώτος περιττός και το πρώτο τετράγωνο.* Η αντίθεση αρτίων και περιττών βρίσκεται στη βάση των σειρών των άλλων νέων βασικών αντιπαραθέσεων (άπειρο – πεπερασμένο, πολλαπλάσιο – μονάδα, αρσενικό – θηλυκό)

Πυθαγόρειο Θεώρημα

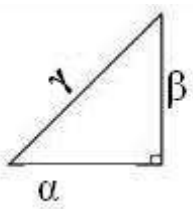


Το Πυθαγόρειο θεώρημα είναι σχέση της Ευκλείδεια γεωμετρίας ανάμεσα στις πλευρές ενός ορθογωνίου τριγώνου. Συνεπώς αποτελεί θεώρημα της Επιπέδου Γεωμετρίας. Σύμφωνα με το Πυθαγόρειο Θεώρημα, που εξ ονόματος αποδίδεται στον αρχαίο Έλληνα φιλόσοφο Πυθαγόρα το:

«Εν τοις ορθογωνίοις τριγώνοις το από της την ορθήν γωνίαν υποτεινούσης πλευράς τετράγωνον ίσον εστί τοις από των την ορθήν γωνίαν περιεχουσών πλευρών τετραγώνοις».

Δηλαδή: *«το τετράγωνο της υποτείνουσας ενός ορθογώνιου τριγώνου ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των δυο κάθετων πλευρών». Από το πυθαγόρειο θεώρημα προκύπτει και το αντίστροφο που λέει ότι "Αν σε ένα οποιοδήποτε τρίγωνο το άθροισμα των τετραγώνων των μικρότερων πλευρών του τριγώνου ισούται με το τετράγωνο της μεγαλύτερης πλευράς, τότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα τη μεγαλύτερη πλευρά και ορθή γωνία αυτή απέναντι από την υποτείνουσα"*

Η παραπάνω πρόταση εκφράζεται με τον ακόλουθο τύπο:



$\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2$. - (όπου γ = το μήκος της υποτείνουσας και α και β = τα μήκη των δύο άλλων πλευρών)

Τη παραπάνω αρχαία διατύπωση της πρότασης του εν λόγω θεωρήματος παρέχει ο αρχαίος επίσης Ευκλείδης στο πρώτο βιβλίο των "Στοιχείων" Γεωμετρίας του (47η πρόταση) με σχετική απόδειξη που κατά παράδοση οφείλεται στον Πυθαγόρα που κατ' άλλη επίσης αρχαία παράδοση μετά την ανακάλυψή του αυτή θυσίασε προς τους θεούς Εκατόμβη γι

αυτό και το θεώρημα αυτό ονομάσθηκε «Εκατόμβη» ή «Θεώρημα εκατόμβης».

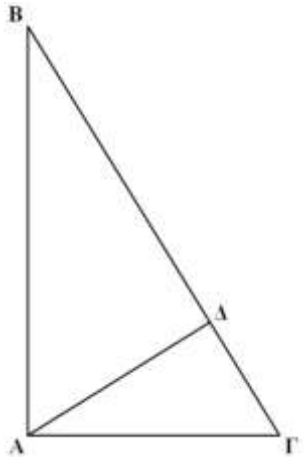
Ισχύει και το αντίστροφο Πυθαγόρειο θεώρημα: ότι δηλαδή, αν ισχύει η παραπάνω σχέση μεταξύ των πλευρών ενός τριγώνου, τότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.

Αποδείξεις

Το πυθαγόρειο θεώρημα αποδεικνύεται με πάνω από έναν τρόπους:

Απόδειξη με ομοιότητα τριγώνων:

Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με ορθή γωνία την Α. Θεωρώ το ύψος της υποτείνουσας ότι την τέμνει στο σημείο Δ. Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΒΑ είναι όμοια μεταξύ τους ως ορθογώνια τρίγωνα με ίδια τη γωνία Β. Παρομοίως τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΓΑ είναι όμοια μεταξύ τους με ίδια τη γωνία Γ. Ισχύει, λοιπόν:



$$\frac{AB}{B\Gamma} = \frac{\Delta B}{AB} \Rightarrow (AB)^2 = (B\Gamma)(\Delta B),$$

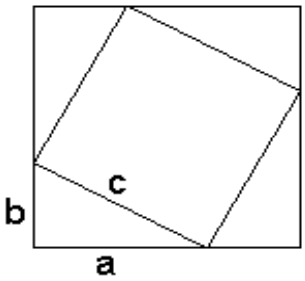
και παρομοίως $(A\Gamma)^2 = (B\Gamma)(\Delta\Gamma)$.

Αν προσθέσουμε τις δυο αυτές εξισώσεις έχουμε:

$$(AB)^2 + (A\Gamma)^2 = (B\Gamma)(\Delta B) + (B\Gamma)(\Delta\Gamma) = (B\Gamma)(\Delta B + \Delta\Gamma) = (B\Gamma)^2.$$

Απόδειξη με εμβαδά

Θεωρούμε ένα τετράγωνο πλευράς a + b και σχεδιάζουμε σε αυτό τέσσερα ορθογώνια τρίγωνα με πλευρές a και b και υποτείνουσα c, έτσι ώστε στο κέντρο να έχουμε τετράγωνο πλευράς c (βλ. σχήμα).



Υπολογίζουμε το εμβαδό του τετραγώνου προσθέτοντας το εμβαδό

του μικρότερου τετραγώνου καθώς και τα εμβαδά των τεσσάρων τριγώνων: $c^2 + 2ab$

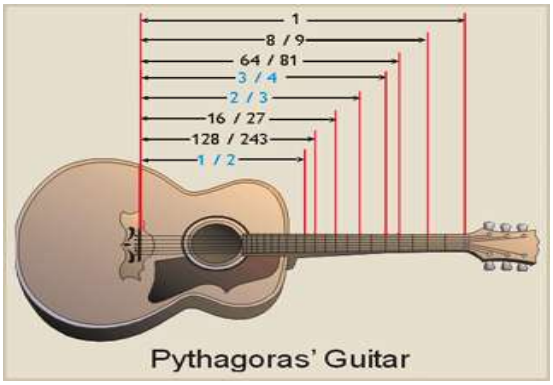
Αφού πρόκειται για τετράγωνο πλευράς a + b το εμβαδό του ισούται επίσης με: $a^2 + b^2 + 2ab$.

Εξισώνοντας τις δυο αυτές σχέσεις προκύπτει:

$$a^2 + b^2 + 2ab = c^2 + 2ab \quad \text{ή} \quad a^2 + b^2 = c^2$$

Πυθαγόρας και Μουσική

Υπολογισμός Διαστημάτων



Πιο συγκεκριμένα ο Πυθαγόρας ήταν αυτός που πρώτος έθεσε τις βάσεις της επιστήμης της Μουσικής με μια επιστημονικά θεμελιωμένη θεωρία της Μουσικής. Ανακάλυψε τη σχέση ανάμεσα στο μήκος των χορδών και το τονικό ύψος που δίνουν.
Για να το πετύχει αυτό χρησιμοποίησε ένα έγχορδο όργανο, που το δημιούργησε ο ίδιος, το «Μονόχορδο».
Αρχικά υπολόγισε ότι δύο χορδές, που η μία είναι διπλάσια από την άλλη (άρα έχουν σχέση 2/1), παράγουν ήχους, δηλαδή νότες, που απέχουν διάστημα Οκτάβας ή «δια πασών». Στη συνέχεια διαπίστωσε ότι όταν δύο χορδές έχουν σχέση 3/2 τότε το διάστημα που σχηματίζουν οι νότες που παράγονται είναι μια 5η Καθαρή. Με αυτά τα διαστήματα, γνωρίζοντας κανείς ότι όταν προσθέτουμε διαστήματα πολλαπλασιάζουμε τους λόγους τους και αντίθετα όταν αφαιρούμε, τους διαιρούμε, -γιατί δεν πρόκειται για ποσότητες αλλά για αναλογίες- μπορούμε να υπολογίσουμε τους λόγους όλων των διαστημάτων. [Π.χ. με αφετηρία τη νότα ντο, η νότα σολ είναι 5η Καθαρή πάνω, άρα έχει σχέση 3/2. Το ρε, και πάλι, είναι μια

5η Καθαρή πάνω από το σολ, άρα σε σχέση με το ντο είναι (3/2)2 = 9/4.
9/4 όμως είναι η σχέση του διαστήματος 9ης. Για να βρούμε λοιπόν το διάστημα 2ας θα πρέπει να διαιρέσουμε (9/4) : (2/1) = 9/8. Άρα η 2η Μεγάλη δίνεται από τη σχέση 9/8.]
Με αυτό τον τρόπο ο Πυθαγόρας υπολόγισε όλα τα διαστήματα και απέδειξε ότι υπάρχουν δύο ειδών ημιτόνια: τα διατονικά (μι-φα και σι-ντο) και τα χρωματικά (π.χ. φα-φα#). Το διατονικό το ονόμασε λείμμα και το χρωματικό αποτομή. Τη διαφορά τους την ονόμασε Πυθαγόρειο Κόμμα, το οποίο μάλιστα είναι ίσο προς τη διαφορά (3/2)12 και (2/1)7.Κανονικά 12 πέμπτες πρέπει να ισούνται με 7 οκτάβες (στο πιάνο αυτά τα διαστήματα ταυτίζονται). Ωστόσο ο Πυθαγόρας απέδειξε πως διαφέρουν κατά το Πυθαγόρειο Κόμμα.
Βέβαια από την αρχαιότητα είχε παρατηρηθεί ότι αυτή η διαδικασία δεν κλείνει ποτέ με την αφετηρία της όσο και αν πολλαπλασιάζουμε, παρόλα αυτά η απόσταση μικραίνει χωρίς ποτέ να γίνεται 0.
Το πλεονέκτημα του Πυθαγόρειου υπολογισμού των διαστημάτων είναι το ότι αποτελεί έναν τρόπο που να στηρίζεται σε αριθμητικές πράξεις και όχι στο αυτό ή την εμπειρία. Αντίθετα το μειονέκτημά του είναι πως σήμερα δεν μπορεί να εφαρμοστεί για το χόρδισμα των οργάνων.
Το Πυθαγόρειο Κόμμα είναι αυτό που οδήγησε στον Ισοτονικό Συγκερασμό (η διαίρεση της οκτάβας σε δώδεκα ίσα τμήματα-ημιτόνια). Μ' αυτόν τον τρόπο τα φυσικά διαστήματα τροποποιούνται ελαφρά ώστε όλα τα ημιτόνια να είναι ίδια και οι δώδεκα 5ες να συμπίπτουν με επτά 8άβες
(δηλαδή 12 5ες = 7 8άβες).
Ο Πυθαγόρας έκανε τους υπολογισμούς του χωρίς να κάνει συγκεκριμένη αναφορά σε κάποιο μουσικό όργανο ή σε κάποια τονικότητα.
Μέχρι το 16ο αι. ο Πυθαγόρειος υπολογισμός των διαστημάτων υπήρξε ο πυρήνας της τεχνικής χορδίσματος των οργάνων.

Διαφορές με τον Αριστόξενο τον Ταραντίνο.

Ο Αριστόξενος ο Ταραντίνος, νεότερος του Πυθαγόρα (περί το 375), υπήρξε φιλόσοφος και σημαντικότατος θεωρητικός της Μουσικής. Γι' αυτό το λόγο μάλιστα, στην αρχαιότητα, του δόθηκε η ονομασία «ο Μουσικός».
Σύμφωνα με τον Αριστόξενο διάστημα είναι το περιεχόμενο τμήμα μεταξύ δύο φθόγγων, που έχουν την ίδια ένταση (ύψος). Ως προς αυτόν λοιπόν το βασικό όρο, το διάστημα παρουσιάζεται ως μία διαφορά εντάσεως και ως χώρος, αυτός μπορεί να περιέχει τόνους (φθόγγους) οξύτερους από τους βαρύτερους και βαρύτερους από τους οξύτερους και των οποίων η ένταση το διάστημα αυτό (τύπος δεκτικός φθόγγων). Η διαφορά όμως των υψών αυτών των φθόγγων δείχνει κατά πόσο η ένταση είναι περισσότερη ή λιγότερη.
Ο W. Burkert ανέφερε την εξής πρόταση για τον Αριστόξενο και τους Πυθαγορείους:
«Η έννοια του ευθύγραμμου τμήματος είναι συνδεδεμένη με το όνομα του Αριστόξενου, η δε διδασκαλία περί της αναλογίας της Μουσικής όμως είναι συνδεδεμένη με τους Πυθαγορείους...».
ως γνωστό ο Αριστόξενος ήταν μεγάλος αντίπαλος της Πυθαγόρειας θεωρίας. Θα παρουσιάσω τη διδασκαλία του συνοπτικά, σύμφωνα με τον C.V.Jan:
«Στην Αρμονική του δεν ερευνά πως δημιουργείται ο κάθε φθόγγος, αν είναι αριθμός ή ταχύτητα (ρυθμός). Το «ούς» πρέπει μόνο αδεσμεύτως σε ότι αφορά τους τόνους να «θεάται» το βασίλειο των φθόγγων. Αυτό μόνο είναι ικανό να μας πληροφορήσει με βεβαιότητα, ποιοι φθόγγοι βρίσκονται σε αρμονική σχέση μεταξύ τους... Το σύστημα της διδασκαλίας του βασίζεται πάνω στις εύκολες αντιληπτές συγχορδίες της τετρατόνου και της πεντατόνου, και χωρίς να ερευνήσει ποια αριθμητική σχέση βρίσκεται στη βάση τους, καθορίζει συμφώνως προς αυτές τον ολόκληρο και τον μισό τόνο κ.λ.π.».
Δηλαδή θέλει να μας εξηγήσει ότι το σύστημα της διδασκαλίας του δεν στηρίζεται στις αριθμητικές σχέσεις, όπως του

Πυθαγόρα, αλλά βασίζεται στην ικανότητα του αυτιού να αντιλαμβάνεται την αρμονική σχέση των μουσικών τόνων. Μπορεί να μην ερευνά τις αριθμητικές σχέσεις μέσα στην οκτάβα, καθορίζει όμως τον ολόκληρο και τον μισό τόνο και κατασκευάζει μια κλίμακα με βάση το ένα δωδέκατο του τόνου. Επομένως η μέθοδός του ήταν, καθαρά, εμπειρική.

ΕΥΔΟΞΟΣ

Ο Εύδοξος ο Κνίδιος (Κνίδος, Μικρά Ασία, περίπου 400 π.Χ. – περίπου 350 π.Χ.), ο εξοχότερος από τους μαθηματικούς και αστρονόμους της εποχής του Πλάτωνος, προώθησε σημαντικά τη θεωρία των αριθμών πέρα από την πυθαγόρεια παράδοση, αποδεικνύοντας την ύπαρξη ασύμμετρων μεγεθών και επινοώντας διάφορες τεχνικές για τη μέτρηση καμπύλων επιφανειών. Επιπλέον, με το σύστημα των ομόκεντρων σφαιρών που επινόησε, έδωσε την πρώτη συστηματική εξήγηση των κινήσεων του Ηλίου, της σελήνης και των πλανητών, τονίζοντας για μια ακόμη φορά την επιμονή των αρχαίων Ελλήνων στη σφαιρική τελειότητα. Εισήγαγε επίσης τη γεωμετρία στην επιστήμη της αστρονομίας και τόνισε πρώτος την ανάγκη αλληλεπίδρασης μεταξύ παρατηρήσεων και θεωρίας που χαρακτηρίζει από τότε την ανάπτυξη της αστρονομίας. Οι συνεισφορές του είναι γνωστές από πολλές ελληνικές πηγές, συμπεριλαμβανομένων και σχολίων που υπάρχουν σε βυζαντινούς κώδικες, αν και κανένα από τα γραπτά του δεν διασώθηκε.

Η ζωή Του Ευδόξου

Ο Εύδοξος, γιος του Αισχίνη, σπούδασε μαθηματικά και ιατρική σε μια σχολή της οποίας η φήμη συναγωνιζόταν τη Σχολή του Ιπποκράτη του Κώου. Ένας πλούσιος γιατρός, εντυπωσιασμένος από τις ικανότητές του, του πλήρωσε τα έξοδα μετάβασης στην Αθήνα για να σπουδάσει στην Ακαδημία του Πλάτωνος, η οποία είχε ιδρυθεί το 387 π.Χ. Έζησε δεκαέξι μήνες στην Αίγυπτο κατά τη διάρκεια της βασιλείας του Νεκτανεβώ Α' (380-363 π.Χ.). Στην Ηλιόπολη, προάστιο σήμερα του Καΐρου, μυήθηκε στη σοφία του ιερατείου, η οποία περιλάμβανε και την αστρονομία. Εκεί έγραψε και την Οκταετηρίδα, το πρώτο του σημαντικό έργο, το οποίο αναφερόταν σε ένα ημερολόγιο βασισμένο σε ένα οκταετή κύκλο, ίσως μετά από μελέτη του πλανήτη Αφροδίτη. Στη συνέχεια ταξίδεψε στην περιοχή της θάλασσας της Προποντίδας, ζώντας από τη διδασκαλία, και μετά επέστρεψε στην Αθήνα, όπου απέκτησε μεγάλη φήμη ως νομοθέτης. Τα λίγα βιογραφικά του στοιχεία μας είναι γνωστά κυρίως από τα κείμενα του Διογένη του Λαέρτιου που έζησε τον 3ο μ.Χ. αιώνα.

Θεωρία της αναλογίας

Είναι γενικά παραδεκτό ότι ο **Ευκλείδης χρησιμοποίησε το έργο του Εύδοξου στο κείμενο των Στοιχείων του**, ιδιαίτερα στα βιβλία V και XII και σε τμήματα των βιβλίων VI,X και XII. Οι δύο βασικές συνεισφορές του Εύδοξου στα μαθηματικά είναι η θεωρία των αναλογιών, που βρίσκεται στο βιβλίο V, και η μέθοδος της εξάντλησης, στο βιβλίο XII.
Ο φιλόσοφος Πρόκλος αποδίδει τη θεωρία των αναλογιών στον Εύδοξο και ο Αρχιμήδης του αποδίδει τη μέθοδο της εξάντλησης. Είναι επίσης πιθανό ότι η αξιωματική μέθοδος του Ευκλείδη αναπτύχθηκε αρχικά από τον Εύδοξο.

Περί τον 5ο και 4ο π.Χ. αιώνα οι πυθαγόρειοι είχαν παρατηρήσει ορισμένες σχέσεις μεταξύ διαφόρων γεωμετρικά μετρήσιμων ποσοτήτων, όπως, παραδείγματος χάρη, μεταξύ

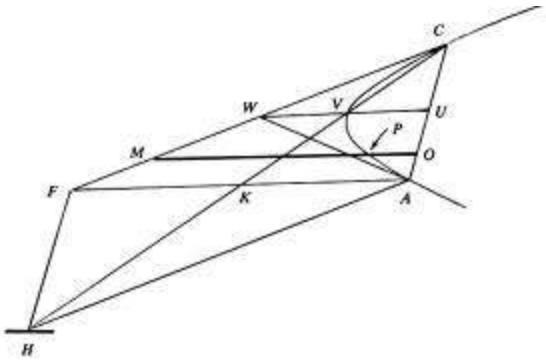
της υποτείνουσας και των κάθετων πλευρών ορθογώνιου τριγώνου, στο οποίο το τετράγωνο της υποτείνουσας ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο κάθετων πλευρών. Αλλά επίσης ανακάλυψαν ότι τα μήκη ορισμένων γεωμετρικών σχημάτων μπορούσαν να εκφραστούν μόνο ως άρρητοι αριθμοί, όπως, π.χ., η διαγώνιος ενός τετραγώνου με πλευρά ίση με τη μονάδα εκφράζεται με έναν αριθμό με άπειρα μη περιοδικά δεκαδικά ψηφία που συμβολίζεται με 1,414213… ή με √2. Η ανακάλυψη των άρρητων αριθμών περί το 400 π.Χ. σήμανε ότι η πυθαγόρεια γεωμετρία, η οποία αρχικά ασχολούνταν μόνο με σύμμετρα μεγέθη, ήταν ανεπαρκής, διότι δεν είχε τα μέσα να πραγματευθεί τους άρρητους αριθμούς.

Στο βιβλίο V των στοιχείων του Ευκλείδη αναπτύσσεται διεξοδικά η θεωρία των αναλογιών του Εύδοξου, της οποίας ο ορισμός των ίσων λόγων, ο περίφημος πέμπτος ορισμός, είναι η κύρια πηγή για τη σύγχρονη θεώρηση των ασύμμετρων αριθμών.

Με τη θεωρία αυτή, η οποία αποτελεί μια βασική συμβολή στη θεωρία των αριθμών, τα μαθηματικά για πρώτη φορά μπορούν να θεωρήσουν μη σύμμετρα μεγέθη, δηλαδή μεγέθη των οποίων ο λόγος δεν ισούται με το πηλίκον δύο ακεραίων, όπως είναι τα μήκη της διαμέτρου και της περιφέρειας ενός κύκλου. Έτσι, μετά τη λύση που δόθηκε από τους αρχαίους Έλληνες στο πρόβλημα υπολογισμού των εμβαδών και των όγκων σχημάτων που περιορίζονται από ευθείες γραμμές και που παρίστανται από ρητούς αριθμούς, η θεωρία των αναλογιών επέτρεψε στον Εύδοξο να ασχοληθεί, με τη βοήθεια ρητών προσεγγίσεων, με μετρήσεις, που συνεπάγονταν άρρητους αριθμούς. Απέδειξε ότι οι άρρητοι αυτοί αριθμοί μπορούν να οριστούν με τη βοήθεια κατάλληλων προσεγγίσεων ρητών.

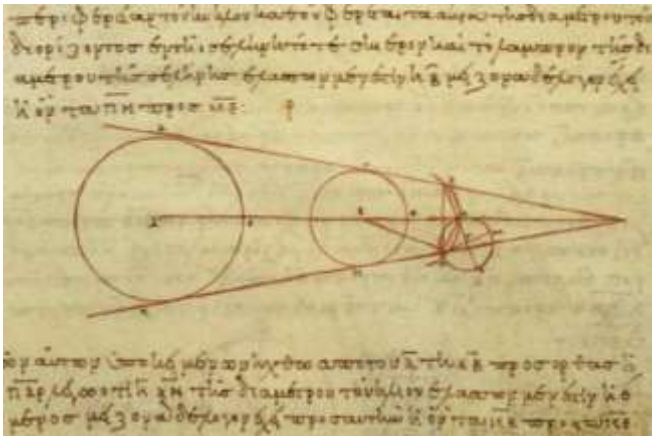
Μέθοδος της εξάντλησης

Πολύ δυσκολότερο όμως ήταν το πρόβλημα του υπολογισμού των εμβαδών και των όγκων σχημάτων που περιορίζονται από καμπύλες. Η λύση που ο Εύδοξος έδωσε στο πρόβλημα αυτό ήταν αυτό που σήμερα λέγεται μέθοδος εξάντλησης, ένας όρος που δεν χρησιμοποιήθηκε από τους αρχαίους Έλληνες (ο όρος «εξάντληση» είναι μεταγενέστερος και εμφανίστηκε για πρώτη φορά σε κείμενο του Γκέγκουαρ ντε Σαιν Βενσάν το 1647).



Ο Εύδοξος έδειξε, εφαρμόζοντας τη μέθοδο αυτή όχι μόνο για άρρητες αλλά και για απειροστές ποσότητες, πώς υποδιαιρείται με συνεχή τρόπο ένα γνωστό μέγεθος μέχρις ότου να προσεγγίσει αρκετά ένα άγνωστο μέγεθος. Κατά τον Αρχιμήδη, ο Εύδοξος χρησιμοποίησε τη μέθοδο αυτή για να αποδείξει ότι οι όγκοι των πυραμίδων και των κώνων ισούνται με το ½ των όγκων των πρισμάτων και των κυλίνδρων, αντίστοιχα, που έχουν τις ίδιες βάσεις και τα ίδια ύψη, αν και είναι πιθανόν ο Δημόκριτος να είχε ήδη ανακαλύψει ότι συμβαίνει αυτό. Ο Εύδοξος απέδειξε επίσης ότι τα εμβαδά δύο κύκλων είναι ανάλογα των τετραγώνων των διαμέτρων τους.

Η μέθοδός του θύμιζε, αν και ήταν αρκετά πιο συστηματική, τη μέθοδο σύμφωνα με την οποία για να βρούμε το εμβαδόν ενός κύκλου εγγράφουμε στον κύκλο κανονικά πολύγωνα των οποίων το πλήθος των πλευρών αυξάνεται διαρκώς. Η μέθοδος της εξάντλησης, που αναπτύσσεται πλήρως στο βιβλίο XII των Στοιχείων του Ευκλείδη, επειδή μπορούσε να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό εμβαδών και όγκων που περιορίζονται από καμπύλες, είναι πρόδρομος του ολοκληρωτικού λογισμού.



Αν και η γεωμετρική μέθοδος υπολογισμού της απόστασης της Γης από τον Ήλιο και της απόστασης της Γης από τη Σελήνη συνήθως αποδίδεται στον Αρίσταρχο τον Σάμιο (άκμασε στον 3ο π.Χ. αιώνα), υπάρχει μια πιθανότητα να είχε ανακαλυφθεί από τον Εύδοξο. Ο Εύδοξος έδωσε λύση σε ένα άλλο αστρονομικό πρόβλημα, δηλαδή στη μαθηματική εξήγηση των φαινόμενων κινήσεων του Ηλίου, της Σελήνης και των πέντε γνωστών τότε πλανητών. Τα επτά αυτά ουράνια σώματα είχαν την ακόλουθη σειρά με βάση την απόσταση από την ακίνητη Γη: Σελήνη, Ερμής, Αφροδίτη, Ήλιος, Άρης, Δίας και Κρόνος. Αν και δεν διασώθηκε η αναφορά του ίδιου του Εύδοξου στη λύση του προβλήματος με τη βοήθεια ομόκεντρων σφαιρών (μια ιδέα που πιθανώς οφείλεται στον Παρμενίδη τον Ελεάτη, περί το 500 π.Χ.), ο Ιταλός αστρονόμος του 19ου αιώνα Σκιαπαρέλι (Giovanni Schiaparelli) περιγράφει τις λεπτομέρειες της μεθόδου, αναλύοντας σύντομες αναφορές της στα Μετά τα Φυσικά του Αριστοτέλη καθώς και μια ουσιώδη ανάπτυξή της στα σχόλια του βιβλίου του Αριστοτέλη Περί ουρανού (βιβλίο ΙΙ), που γράφηκαν τον 6ο μ.Χ. αιώνα από τον Έλληνα φιλόσοφο Σιμπλίκιο.

Αστρονομία

Επειδή τα άστρα φαινόταν να μην έχουν ανεξάρτητη κίνηση, οι αρχαίοι πίστευαν ότι αυτά περιστρέφονταν γύρω από τη Γη ως ένα ενιαίο σύνολο που σχημάτιζε ένα σταθερό «φόντο» πάνω στο οποίο παρατηρούνταν και σχεδιάζονταν όλες οι πολύπλοκες και

ακανόνιστες κινήσεις των πλανητών. Για να εξηγήσει τις κινήσεις αυτές, ο Εύδοξος κατασκεύασε ένα μοντέλο από 27 σφαίρες. Πάνω στην εξωτερική σφαίρα τοποθέτησε όλα τα σταθερά άστρα για να λάβει υπόψη του την ημερήσια κίνησή τους από ανατολάς προς δυσμάς. Επινόησε ένα σύνολο αλληλοσυνδεδεμένων σφαιρών για καθένα από τα υπόλοιπα ουράνια σώματα, δηλαδή τρεις σφαίρες για τον Ήλιο, τρεις σφαίρες για τη Σελήνη και τέσσερεις για καθέναν από τους υπόλοιπους πέντε πλανήτες. Ο κάθε πλανήτης κινούνταν πάνω στον ισημερινό της εσωτερικής του σφαίρας, ενώ η Σελήνη κινούνταν στη μεσαία από τις τρεις σφαίρες της. Η κάθε σφαίρα είχε την κατάλληλη αξονική κλίση και περιστροφική ταχύτητα. Η εξωτερική σφαίρα περιέγραφε την ημερήσια κίνηση από ανατολάς προς δυσμάς.

Η εσωτερική σφαίρα της Σελήνης σχημάτιζε γωνία με την εκλειπτική (τη φαινόμενη τροχιά του Ηλίου μέσα από τους αστερισμούς) και περιστρεφόταν από ανατολάς προς δυσμάς κατά μία πλήρη περιστροφή σε κάθε σεληνιακό μήνα, που σήμερα γνωρίζουμε ότι διαρκεί 27.2122 ημέρες. Η μεσαία σφαίρα που έφερε τη Σελήνη κινούνταν από δυσμάς προς ανατολάς κατά την εκλειπτική για να εξηγήσει τις φάσεις της Σελήνης. Η εσωτερική σφαίρα του Ηλίου κινούνταν από δυσμάς προς ανατολάς και ήταν κεκλιμένη (εσφαλμένα) προς την εκλειπτική, για να εξηγήσει την άνιση διάρκεια των εποχών, ενώ η μεσαία σφαίρα του κινούνταν από δυσμάς προς ανατολάς κατά την εκλειπτική κάνοντας μία πλήρη περιστροφή κάθε αστρικό έτος (μία πλήρη περιστροφή του Ηλίου στο ίδιο σημείο των αστερισμών).

Για να αναπαραστήσει τις οπισθοδρομικές κινήσεις των πέντε πλανητών, ο Εύδοξος βασίστηκε στις συνδυασμένες περιστροφικές κινήσεις των δυο εσωτερικών σφαιρών του κάθε πλανήτη. Η συνισταμένη κίνηση περιγράφεται από ένα επίμηκες οκτώ, που το ονόμασε ιπποπέδη. Η καμπύλη αυτή, που είναι μία από τις λίγες μη κυκλικές καμπύλες της Αρχαιότητας, παριστάνει την «περιπλάνηση» κάθε πλανήτη κατά μήκος και κατά πλάτος. Καθώς ο πλανήτης, πάνω στην εσωτερική του σφαίρα, ταλαντευόταν κατά μήκος της

ιπποπέδης κατά τη διάρκεια οπισθοδρομήσεων, η ίδια η ιπποπέδη περιστρεφόταν καθημερινά στην εξωτερική σφαίρα, ενώ προχωρούσε μία φορά κάθε αστρικό έτος γύρω από την εκλειπτική, με τη βοήθεια της δεύτερης από τα έξω σφαίρας.

Επινοώντας αυτούς τους συνδυασμούς σφαιρών, ο Εύδοξος εξήγησε τις φαινομενικά ακανόνιστες κινήσεις των ουράνιων σωμάτων του ηλιακού συστήματος, διατηρώντας έτσι την ελληνική αντίληψη της κυκλικής τελειότητας. Το σύστημα του αποτελεί μια αξιέπαινη προσπάθεια να «διατηρηθούν τα φαινόμενα», καθώς αναπαριστά ικανοποιητικά τις φαινόμενες κινήσεις του Ερμή, του Δία, του Κρόνου, του Ηλίου και της Σελήνης, αλλά δεν ήταν ικανοποιητικό για την Αφροδίτη, ενώ απέτυχε πλήρως με τον Άρη. Δεν μπορούσε επίσης να εξηγήσει τις μεταβολές στη λαμπρότητα, την περίοδο τροχιάς, στο φαινόμενο μέγεθος της Σελήνης ή στη συνοδική περίοδο.

Μετά τον θάνατό του, το 350 π.Χ. περίπου, οι θεμελιώδεις συνεισφορές του Εύδοξου στη γεωμετρία και τη θεωρία αριθμών ώθησαν τα μαθηματικά των αρχαίων Ελλήνων σε νέα επιτεύγματα, όπως φαίνεται, λόγου χάρη, από το έργο του Αρχιμήδη. Ο Εύδοξος εισήγαγε στην αστρονομία την άποψη ότι μια ομοιόμορφη κυκλική κίνηση μπορεί να εξηγήσει τις μη κανονικές κινήσεις όλων των ουράνιων σωμάτων, μια άποψη που, μετά τη συμπλήρωσή της από τις επικυκλοειδείς καμπύλες του Πτολεμαίου, επικράτησε μέχρι τον 17ο αιώνα, δηλαδή την εποχή του Κέπλερ (Johannes Kepler). Η αντίληψη του Εύδοξου για την κυκλική κανονικότητα υπάρχει ακόμη στα σύγχρονα μαθηματικά, όπως, π.χ. στον περιοδικό χαρακτήρα των απειροσειρών.

ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ

Ο Ευκλείδης ήταν μεγάλος έλληνας μαθηματικός της Αρχαιότητας.
Για τον τόπο και τον χρόνο της γέννησης και του θανάτου του δεν είναι τίποτε γνωστό. Άκμασε περί το 300 π.Χ. Είναι γνωστό ότι ίδρυσε σχολή και δίδαξε στην Αλεξάνδρεια την εποχή του Πτολεμαίου του Α΄, που βασίλευσε από το 323 μέχρι το 285 π.Χ. Συχνά, διάφοροι μεσαιωνικοί μεταφραστές και εκδότες τον συνέχεαν με τον φιλόσοφο Ευκλείδη τον Μεγαρέα, έναν σύγχρονο του Πλάτωνος, που έζησε έναν περίπου αιώνα πριν.
Στο χρονικό διάστημα από τον θάνατο του Πλάτωνος (347 π.Χ.) μέχρι το πρώτο έτος της βασιλείας του Πτολεμαίου Α΄ (323 π.Χ.) ο Ευκλείδης πρέπει να είχε αποκτήσει φήμη διαπρεπούς μαθηματικού. Αυτό συμπεραίνεται από το γεγονός ότι ο Πτολεμαίος τον κάλεσε να αναλάβει την οργάνωση του νέου πανεπιστημίου στην Αλεξάνδρεια.

Η μεγάλη φήμη που απέκτησε ο Ευκλείδης οφείλεται στο σύγγραμμά του που φέρει τον τίτλο
Στοιχεία.

Η λέξη υποδηλώνει εδώ τα στοιχεία των μαθηματικών, δηλαδή τα στοιχεία της γεωμετρίας και της θεωρίας αριθμών. Η πραγματεία αυτή από την εποχή που γράφηκε μέχρι σχεδόν σήμερα άσκησε μια βασική και συνεχή επίδραση στην ανθρώπινη σκέψη. Υπήρξε η βασική πηγή γεωμετρικής σκέψης, θεωρημάτων και μεθόδων τουλάχιστον μέχρι την εμφάνιση των μη ευκλείδειων γεωμετριών κατά τον 19ο αιώνα. Από παιδαγωγική και

μεθοδολογική άποψη τα Στοιχεία θεωρούνται ως το πληρέστερο πνευματικό δημιούργημα της ανθρώπινης διάνοιας. Λέγεται ότι, μετά τη Βίβλο, τα Στοιχεία είναι πιθανώς το βιβλίο που έχει μεταφραστεί, εκδοθεί και μελετηθεί περισσότερο από όλα τα βιβλία του δυτικού κόσμου. Ο Ευκλείδης συνέγραψε πολλά άλλα έργα, ορισμένα από τα οποία έχουν χαθεί.

Πριν από τον Ευκλείδη είχαν γράψει Στοιχεία των μαθηματικών ο Αναξίμανδρος, ο Ιπποκράτης ο Χίος, ο Λέων και ο Θεόδιος ο Μάγνης (από τη Μαγνησία της Μικράς Ασίας). Τα έργα όμως των μεγάλων αυτών επιστημόνων δεν επέζησαν αφότου είδαν το φως της δημοσιότητας τα Στοιχεία του Ευκλείδη.

Ο Έλληνας φιλόσοφος Πρόκλος (5ος μ.Χ. αιώνας) αναφέρει την ιστορική απάντηση του Ευκλείδη στο Πτολεμαίο όταν ο τελευταίος τον ρώτησε αν υπάρχει κάποιος συντομότερος δρόμος για τη μελέτη της γεωμετρίας από αυτόν των Στοιχείων: «Δεν υπάρχει βασιλική οδός για τη γεωμετρία» απάντησε ο Ευκλείδης. Ένα άλλο ανέκδοτο αναφέρει ότι ένας μαθητής του, πιθανότατα στην Αλεξάνδρεια, αφού έμαθε τα πρώτα θεωρήματα της γεωμετρίας, ζήτησε να μάθει τι κέρδος θα είχε από τις γνώσεις αυτές, οπότε ο Ευκλείδης είπε στον υπηρέτη του: «Δώσ' του τρεις δεκάρες για να κερδίσει κάτι από το θεώρημα που έμαθε».

Το περιεχόμενο των Στοιχείων κατανέμεται σε 13 βιβλία. Από αυτά, τα 10 αφορούν τη γεωμετρία και τα υπόλοιπα 3 τη θεωρία αριθμών. Ειδικότερα, στο πρώτο βιβλίο περιλαμβάνονται διάφοροι ορισμοί (23), τα περίφημα αξιώματα [με τους τίτλους αιτήματα (5) και κοινές έννοιες (9)] και η θεωρία των τριγώνων που περιέχει 48 θεωρήματα.

Το τεσσαρακοστό έβδομο από αυτά είναι το πυθαγόρειο θεώρημα. Στο δεύτερο βιβλίο προτάσσονται δύο ορισμοί και ακολουθούν 14 θεωρήματα· από αυτά, τα δέκα πρώτα αφορούν την άλγεβρα των γεωμετρικών μεγεθών, που θεωρείται δημιούργημα των πυθαγορείων. Το ενδέκατο θεώρημα είναι το λεγόμενο από τους νεότερους (από το έτος 1200) θεώρημα της χρυσής τομής, ενώ από τον Ευκλείδη ονομάζεται θεώρημα της τομής ευθείας σε άκρο και μέσο λόγο. Το θεώρημα αυτό, που

θεωρείται εύρημα των πυθαγορείων, αποτελεί τη βάση πολλών αρχιτεκτονικών κατασκευών (της Ακρόπολης των Αθηνών, των ελληνικών θεάτρων κ.λπ.) και έτυχε ιδιαίτερης έρευνας και προσοχής από τον Μιχαήλ Άγγελο και άλλους ζωγράφους. Κατά τον ψυχολόγο Φέχνερ, ο άνθρωπος κατέχεται από ευχάριστο συναίσθημα όταν βλέπει αντικείμενα με αναλογίες που ικανοποιούν το θεώρημα της χρυσής τομής. Ένα ευθύγραμμο τμήμα έχει τμηθεί σε άκρο και μέσο λόγο όταν με την τομή λαμβάνονται δύο άνισα μέρη κατά τέτοιον τρόπο ώστε το γινόμενο του μήκους του ευθύγραμμου τμήματος με το μήκος του μικρότερου μέρους να είναι ίσο με το τετράγωνο του μήκους του μεγαλύτερου μέρους. Το ανθρώπινο σώμα, ως προς τις διαστάσεις του, έχει διαμορφωθεί κατά το θεώρημα της χρυσής τομής. Το ίδιο παρατηρείται και στα ζώα και στα φυτά (κυρίως στα άνθη).

Οι πυθαγόρειοι ανακάλυψαν, επομένως, με το θεώρημα αυτό, το οποίο διέσωσε ο Ευκλείδης στα Στοιχεία του, έναν σπουδαίο φυσικό νόμο. Τα υπόλοιπα τρία θεωρήματα του δεύτερου βιβλίου εξετάζουν μερικές ιδιότητες του οξυγώνιου και του αμβλυγώνιου τριγώνου και την κατασκευή τετραγώνου ισοδύναμου προς ένα δοσμένο ευθύγραμμο σχήμα.

Στο τρίτο βιβλίο, το οποίο περιέχει 37 θεωρήματα, εξετάζεται ο κύκλος. Πριν από τα θεωρήματα υπάρχουν 11 ορισμοί. Στο τέταρτο βιβλίο περιλαμβάνονται 16 προβλήματα, που αφορούν κατασκευές τριγώνων και εγγραφή και περιγραφή σε κύκλο κανονικών πολυγώνων. Πριν από τα θεωρήματα υπάρχουν 7 ορισμοί.

Τα βιβλία I – IV ασχολούνται με τις γεωμετρικές κατασκευές επιπέδων σχημάτων, δηλαδή τετράπλευρων, κύκλων, τριγώνων, πολυγώνων που κατασκευάζονται με τη βοήθεια κύκλων. Έχει υποστηριχτεί ότι μέλη αυτών των βιβλίων, ιδιαίτερα το II, παραπέμπουν σε ένα είδος αλγεβρικής γεωμετρίας, όπου οι γεωμετρικές κατασκευές παίζουν το ρόλο των αλγεβρικών πράξεων. Είτε αυτό ισχύει είτε όχι, αυτό που είναι εμφανές είναι ότι τουλάχιστον σε αυτά τα πρώτα θεωρήματα ο Ευκλείδης ασχολείται μόνο με καθαρά γεωμετρικές έννοιες.

Το πέμπτο βιβλίο είναι η γενική θεωρία των αναλογιών όπως παρουσιάστηκε από τον Εύδοξο, η ανακάλυψη ήταν η θεωρία των αναλογιών και τη μέθοδο της εξάντλησης.
Το φαινομενικό αδιέξοδο των ασύμμετρων παρακάμφθηκε κατά μεγάλο μέρος δεδομένου ότι μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν τα γινόμενα και τα πηλίκα τους, μέσω των αναλογιών του Ευδόξου.
Το πέμπτο βιβλίο περιέχει σε 25 θεωρήματα τη θεωρία των αναλογιών. Πριν από τα θεωρήματα υπάρχουν 18 ορισμοί, μεταξύ των οποίων περιλαμβάνεται το περίφημο αξίωμα της συνέχειας των σύγχρονων μαθηματικών (4ος ορισμός). Ολόκληρο το πέμπτο βιβλίο, λέγει ανώνυμος Βυζαντινός σχολιαστής, είναι έργο του Ευδόξου.

Στο έκτο βιβλίο προτάσσονται 5 ορισμοί και ακολουθούν 33 θεωρήματα, στα οποία εξετάζονται οι ιδιότητες της ομοιότητας των σχημάτων, και περιέχεται μια γενίκευση του Πυθαγορείου θεωρήματος που δεν προσδιορίζεται στα τετράγωνα που κατασκευάζονται από τις πλευρές του τριγώνου, αλλά επεκτείνεται σε οποιοδήποτε κατασκευάσιμο σχήμα. Έτσι εάν κατασκευάσουμε ημικύκλια με διάμετρο την κάθε πλευρά του τριγώνου, τότε το άθροισμα των εμβαδών των δύο μικρότερων ημικυκλίων ισούται με το εμβαδόν του μεγαλύτερου ημικυκλίου. Μεταξύ αυτών περιλαμβάνονται δύο θεωρήματα που αφορούν την έλλειψη και την υπερβολή. Η παραβολή μελετάται στο 44ο θεώρημα του πρώτου βιβλίου. (Η έλλειψη, η παραβολή και η υπερβολή ονομάζονται κωνικές τομές). Κατά τον Πρόκλο, οι πρώτες έρευνες για τις κωνικές τομές έγιναν από τους πυθαγόρειους. Το 27ο θεώρημα του έκτου βιβλίου είναι το πρώτο θεώρημα στην ιστορία των μαθηματικών στο οποίο γίνεται λόγος περί μεγίστου.

Στα βιβλία 7, 8, 9 εκτίθενται τα στοιχεία της θεωρίας των αριθμών. Ορισμοί περιέχονται και προτάσσονται μόνο στο έβδομο βιβλίο (23). Το βιβλίο αυτό περιέχει επίσης 39 θεωρήματα, στα οποία εξετάζεται ο μέγιστος κοινός διαιρέτης, το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο και βασικές ιδιότητες των πρώτων αριθμών. Από τους ορισμούς του έβδομου βιβλίου βλέπουμε ότι η αντιμετώπιση των αριθμών γίνεται ουσιαστικά γεωμετρικά.

Ο Ευκλείδης λέει ότι «ο μεγαλύτερος αριθμός είναι πολλαπλάσιο του μικρότερου όταν μπορεί να μετρηθεί από αυτόν», και ότι το γινόμενο δύο αριθμών είναι το εμβαδόν ενός ορθογωνίου. Υπάρχει επίσης ο περίφημος κανόνας, γνωστός με το όνομα Ευκλείδειος αλγόριθμος, για την εύρεση του μέγιστου κοινού διαιρέτη δύο αριθμών ή με τα λόγια του Ευκλείδη «του μεγαλύτερου κοινού μέτρου μεταξύ δύο μεγεθών».

Το όγδοο βιβλίο περιέχει 27 θεωρήματα. Σε αυτά επεκτείνεται η θεωρία των αναλογιών του πέμπτου βιβλίου και ερευνώνται βασικές ιδιότητές τους. Στο ένατο βιβλίο εξετάζονται κυρίως βασικά θεωρήματα των προόδων. Από τα 36 θεωρήματα που περιλαμβάνει το ένατο βιβλίο αξίζει να μνημονευθούν δύο σπουδαία θεωρήματα: το 20ό, στο οποίο αποδεικνύεται ότι το πλήθος των πρώτων αριθμών είναι μεγαλύτερο από οποιοδήποτε δοσμένο πλήθος πρώτων αριθμών, και το 36ο, στο οποίο αποδεικνύεται πότε ένας τέλειος (ένας αριθμός κ λέγεται τέλειος όταν το άθροισμα των θετικών διαιρετών του, εκτός του κ, ισούται με κ). Λόγου χάρη, ο αριθμός 6 είναι τέλειος αφού 1+2+3=6. Ο 28 είναι τέλειος αφού 1+2+4+7+14=28.

Οι αρχαίοι είχαν ανακαλύψει πέντε τέλειους αριθμούς, τους: 6,28,496,8,128,33,550,336.

Το δέκατο βιβλίο είναι το εκτενέστερο και το αρτιότερο. Περιέχει 115 θεωρήματα. Ανώνυμος σχολιαστής αναφέρει ότι σε αυτό υπήρχαν και άλλα 8 θεωρήματα, τα οποία χάθηκαν. Στο βιβλίο αυτό εξετάζεται η θεωρία των ασύμμετρων μεγεθών, που ανάγεται στην έννοια της αρρητότητας μεταξύ μηκών και τετραγώνων, τα βασικά μέρη της οποίας οφείλονται στους πυθαγορείους και ιδίως στην Ακαδημία του Πλάτωνος (Θεαίτητος, κυρίως, και Εύδοξος). Εάν θεωρήσουμε μια ευθεία γραμμή, η οποία ορίζεται ως ρητή, τότε οποιαδήποτε ευθεία γραμμή ασύμμετρη ως προς αυτή λέγεται ότι είναι άρρητη. Μακροσκελείς αποδείξεις παρατίθενται για όλους τους διαφόρους τύπους των άρρητων, από απλές τετραγωνικές ρίζες μέχρι πολύπλοκα συμπλέγματα ριζών. Η εξέταση των διαφόρων τρόπων αριθμητικής έκφρασης των άρρητων είναι αποκαλυπτική για τα προβλήματα που αντιμετώπιζαν τότε. Ο

συμβολισμός που υπήρχε βασιζόταν στον Ευκλείδειο αλγόριθμο, αλλά και η παράσταση στην οποία κατέληγε για έναν συγκεκριμένο άρρητο ήταν χρήσιμη, δεν υπήρχε απλή μέθοδος για να εκφράσει αθροίσματα ή γινόμενα με τον ίδιο τρόπο. Ενδιαφέρον παρουσιάζει το Λήμμα 1, το οποίο βρίσκει δύο τετράγωνα που το άθροισμά τους να είναι και αυτό τετράγωνο. Το Πυθαγόρειο θεώρημα από τη σκοπιά της θεωρίας των αριθμών χωρίς καμία αναφορά στην απόδειξή του παρατίθεται στο τέλος του πρώτου βιβλίου. Σε αυτό το βιβλίο υπονοείται σαφώς ότι αυτές οι αριθμητικές και γεωμετρικές μέθοδοι δεν είναι παρά ένα προοίμιο για πιο προχωρημένα προβλήματα, όπως η εύρεση των εμβαδών και τα προβλήματα τετραγωνισμού. Μπορεί επίσης να σημειωθεί ότι στους άρρητους στους οποίους γίνεται αναφορά μπορούν όλοι να κατασκευαστούν με κανόνα και διαβήτη. Η εκτενέστατη ταξινόμηση των αρρήτων αποκτά νόημα στα τελευταία κεφάλαια των στοιχείων, όπου εμφανίζονται σε σχέση με τα κανονικά πολύεδρα. Το βιβλίο αυτό είναι τόσο δύσκολο, ώστε κατά τον 17ο αιώνα χαρακτηριζόταν από μεγάλους μαθηματικούς της Ευρώπης ως ο σταυρός του μαρτυρίου των μαθηματικών.

Τα τρία τελευταία βιβλία των Στοιχείων αφορούν τη στερεομετρία και χρησιμοποιούν τη μέθοδο του Ευδόξου για την εύρεση με αυστηρό μαθηματικό τρόπο εμβαδών και όγκων μέσω αλλεπάλληλων προσεγγίσεων. Ο Αρχιμήδης απέδωσε στον Εύδοξο την πρώτη απόδειξη ότι ο όγκος του κώνου είναι το 1/3 του όγκου ενός κυλίνδρου με ίση βάση και ύψος, και μεγάλο μέρος του δωδέκατου βιβλίου θεωρείται ότι βασίζεται στην εργασία του Ευδόξου. Το δέκατο τρίτο βιβλίο κλείνει με την απόδειξη ότι υπάρχουν μόνο πέντε κανονικά πλατωνικά στερεά τα οποία μπορούν να κατασκευαστούν από τρίγωνα, τετράγωνα και πεντάγωνα. Όλα τα στερεά κατασκευάζονται μέσα σε μια σφαίρα. Στο ενδέκατο βιβλίο προτάσσονται 28 ορισμοί (και για τα τρία βιβλία) και ακολουθούν 39 θεωρήματα· σε αυτά μελετώνται τα πρίσματα. Στο δωδέκατο βιβλίο, που περιέχει 18 θεωρήματα, γίνεται η μελέτη της πυραμίδας, του κώνου, του κυλίνδρου και της σφαίρας.

Τέλος, στο δέκατο τρίτο βιβλίο, που περιέχει επίσης 18 θεωρήματα, μελετάται η εγγραφή σε σφαίρα των πέντε κανονικών πολυέδρων, που λέγονται και πλατωνικά σχήματα (τετράεδρο, οκτάεδρο, κύβος, εικοσάεδρο και δωδεκάεδρο).

Στα Στοιχεία του Ευκλείδη χρησιμοποιούνται οι τέσσερεις αποδεικτικές μέθοδοι των μαθηματικών:

- **η συνθετική,**
- **η της εις άτοπον επαγωγής,**
- **η αναλυτική και**
- **η της τέλειας επαγωγής.**

Πριν από μερικές δεκαετίες θεωρούνταν ότι η μέθοδος της τέλειας επαγωγής ήταν ανακάλυψη του 16ου αιώνα. Πρώτος ο Ιταλός μαθηματικός Τζόρτζο Βάκα (Vacca),κατά το 1910, εξέφρασε τη γνώμη ότι σε μερικά θεωρήματα των Στοιχείων χρησιμοποιούνταν η μέθοδος της τέλειας επαγωγής. Το 1953 ο Ε.Σ. Σταμάτης ανακοίνωσε στην Ακαδημία Αθηνών θεωρήματα των Στοιχείων στα οποία γίνεται εφαρμογή της μεθόδου της τέλειας επαγωγής που χρησιμοποιείται πολύ στα σύγχρονα μαθηματικά.
(Ανακοίνωση στην Ακαδημία Αθηνών κατά τη συνεδρία της 11ης Ιουνίου 1953.)
Κατά την Αρχαιότητα έγραψαν σχόλια για τα στοιχεία οι Αλεξανδρινοί Ήρων και Πάππος, καθώς επίσης ο Πρόκλος και ο Συμπλίκιος. Ο Θέων ο Αλεξανδρεύς (4ος μ.Χ. αιώνας) πραγματοποίησε μια αναθεωρημένη έκδοση του έργου, η οποία περιλάμβανε αλλαγές στο κείμενο και ορισμένες προσθήκες. Η έκδοση αυτή ήταν το θεμέλιο για όλα τα ελληνικά κείμενα και τις μεταφράσεις μέχρι τις αρχές του 19ου αιώνα, όταν ανακαλύφθηκε στο Βατικανό μια έκδοση προγενέστερη από αυτήν του Θέωνος. Τον Μεσαίωνα έγιναν τρεις αραβικές μεταφράσεις των Στοιχείων. Ο Ευκλείδης έγινε για πρώτη φορά γνωστός στη Δύση από λατινικές μεταφράσεις των αραβικών κειμένων.

Η πρώτη σωζόμενη λατινική μετάφραση των Στοιχείων έγινε περί το 1120 από τον Αδελάρδο του Μπαθ (Adelard of Bath), που είχε αποκτήσει ένα αντίγραφο μιας αραβικής μετάφρασης

στην Ισπανία, όπου είχε ταξιδεύσει μεταμφιεσμένος σε μουσουλμάνο σπουδαστή. Ο Αδελάρδος συνέταξε επίσης μια συντομότερη μετάφραση και μια έκδοση με σχόλια.

Η πρώτη μετάφραση, κατευθείαν από τα Ελληνικά, χωρίς αραβική μεσολάβηση, έγινε από τον Βαρθολομαίο Ζαμπέρτι (Zamberti) και εκδόθηκε στα Λατινικά στη Βιέννη το 1505.
Η βασική έκδοση του ελληνικού κειμένου έγινε το 1533 στη Βασιλεία από τον Σίμον Γκρυνέους (Grynaeus). Αλλά η σημαντικότερη λατινική μετάφραση της περιόδου αυτής έγινε το 1572 από τον Φεντερίκο Κομαντίνο (Commandino). Η πρώτη έκδοση του πλήρους έργου του Ευκλείδη ήταν η έκδοση της Οξφόρδης το 1703 στα Ελληνικά και Λατινικά από τον Ντέιβιντ Γκρέγκορυ (Gregory). Όλα όμως αυτά τα κείμενα υπερκαλύφθηκαν από την έκδοση του πλήρους έργου του Ευκλείδη (Euclidis Opera Omnia, 8 τόμοι και ένα συμπλήρωμα, 1883-1916) που πραγματοποιήθηκε από τους Χάιμπεργκ και Μένγκε (J.L. Heiberg και H. Menge). Η πρώτη αγγλική μετάφραση των Στοιχείων έγινε από τον σερ Χένρυ Μπίλινγκσλυ (Billingsley).

Περί το 900 μ.Χ. εκδόθηκαν επίσης τα Στοιχεία στην Κωνσταντινούπολη από τον Λέοντα τον Σοφό. Η επόμενη έκδοση στην Ελλάδα έγινε μετά από 1.050 χρόνια, από τον Ε. Σταμάτη, σε 4 τόμους (1952-1957, Αθήνα).

Ανάμεσα στα υπόλοιπα σωζόμενα έργα του Ευκλείδη υπάρχουν δύο που ανήκουν στη στοιχειώδη γεωμετρία. Τα Δεδομένα, που περιέχουν 94 προτάσεις της μορφής «αν σε ένα σχήμα δίνονται ορισμένα στοιχεία, τότε μπορούν να προσδιοριστούν διάφορα άλλα στοιχεία», και το βιβλίο Περί Διαιρέσεων, το οποίο ανακαλύφθηκε και σε αραβική και σε λατινική μετάφραση και που εκδόθηκε το 1915. Αυτό ασχολείται με το πρόβλημα της διαίρεσης ενός δοσμένου σχήματος με μία ή περισσότερες ευθείες σε ισοδύναμα τμήματα ή σε τμήματα που έχουν σταθερό λόγο μεταξύ τους ή προς άλλα δοσμένα εμβαδά. Τα Οπτικά του Ευκλείδη σώζονται στα Ελληνικά σε δύο μορφές: η μία ανήκει στον ίδιο τον Ευκλείδη, ενώ η άλλη είναι μια σχολιασμένη αναθεώρηση από τον Θέωνα. Τα Κατοπτρικά δεν είναι έργο του Ευκλείδη, αλλά μάλλον πρόκειται για μια μεταγενέστερη σύνθεση αρχαίων

έργων πάνω στο θέμα αυτό. Τα Φαινόμενα, που σώζονται στα Ελληνικά, είναι μια πραγματεία, πάνω στη γεωμετρία της σφαίρας με εφαρμογές στην αστρονομία. Τα Στοιχεία μουσικής αποδίδονται στον Ευκλείδη και από τον Πρόκλο και από τον σχολιαστή Μαρίνο.
Στο έργο αυτό περιέχονται και δύο πραγματείες που μάλλον δεν είναι του Ευκλείδη:
η Διαίρεση της κλίμακας, η οποία αποδίδει την πυθαγόρεια θεωρία της μουσικής, με κάποιες μεταγενέστερες προσθήκες και η Εισαγωγή στην αρμονία, που έχει γραφτεί από τον Κλεωνίδη, μαθητή του Αριστοξένου.

Στον Ευκλείδη αποδίδονται επίσης τέσσερα γεωμετρικά έργα, τα οποία χάθηκαν, αλλά έχουν περιγραφεί σε διάφορες πηγές. Ο στόχος των Ψευδαρίων λέγεται ότι ήταν να διευκρινίσουν και να προειδοποιήσουν τους αρχάριους σπουδαστές σχετικά με τα διάφορα είδη σφαλμάτων στα οποία θα μπορούσαν να υποπέσουν μελετώντας γεωμετρία.
Τα Πορίσματα, σε τρία βιβλία, ήταν μια προχωρημένη εργασία, της οποίας μια σύνοψη έδωσε ο Πάππος. Με τον όρο αυτόν ο Ευκλείδης χαρακτήριζε προτάσεις πιο σημαντικές από ένα απλό πρόβλημα, αλλά λιγότερο σημαντικές από ένα θεώρημα.
Τα Κωνικά αποτελούνταν από 4 βιβλία πάνω στις κωνικές τομές και αντιστοιχούσαν στο περιεχόμενο των τεσσάρων πρώτων βιβλίων των Κωνικών του Απολλώνιου, αν και ο Απολλώνιος προσέθεσε νέα θεωρήματα στο έργο του. Ο Ευκλείδης χρησιμοποιούσε την παλιά ορολογία για να ονομάσει τις κωνικές τομές, δηλαδή μια ονομασία που περιέγραφε αν η γωνία του τέμνοντος επιπέδου με τον κώνο είναι ορθή, αμβλεία ή οξεία. Πρώτος ο Απολλώνιος τις ονόμασε παραβολή, υπερβολή και έλλειψη και έδωσε επίσης την περιγραφή τους. Ο Πάππος αναφέρει επίσης το βιβλίο του Ευκλείδη Επιφάνειες – Τόποι, που αποτελούνταν από δύο τόμους και που πιθανόν αναφερόταν σε γεωμετρικούς τύπους πάνω σε επιφάνειες ή σε γεωμετρικούς τόπους οι οποίοι είναι επιφάνειες, καθώς και σε κωνικές τομές.

ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ ο ΣΥΡΑΚΟΥΣΙΟΣ

'Έζησε στο διάστημα (287-212 π.Χ.).

Εξέχουσα μαθηματική φυσιογνωμία με τεράστιο όγκο έργων, πρωτοπόρων και ποιοτικά κορυφαίων. Εξαιρετικό πρότυπο γεωμέτρη ερευνητή, αποτελεί μαζί με τον Ιπποκράτη και τον Εύδοξο, την τριάδα των πρωτεργατών του απειροστικού λογισμού.

Ο Αρχιμήδης ασχολήθηκε κυρίως με την μελέτη όλων των προβλημάτων των Μαθηματικών και των Μαθηματικών τεχνών, που εκκρεμούσαν από παλαιότερες μελέτες και ανακάλυψε πλήθος μεθόδων και νέων προτάσεων.

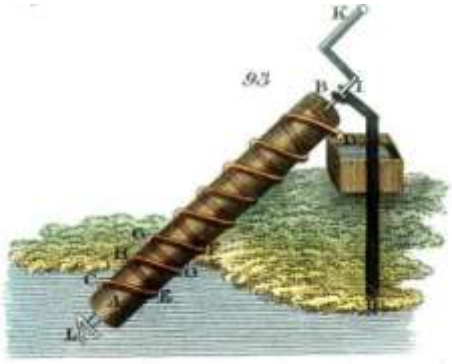
Η πρωτοτυπία και η αποτελεσματικότητα των μελετών του έγιναν αιτία να χαρακτηριστεί από τους ιστορικούς των μαθηματικών, ως ο μεγαλύτερος μαθηματικός όλων των εποχών και όλων των εθνών.

Ο ΒΙΟΣ ΤΟΥ ΑΡΧΙΜΗΔΗ

Αρχιμήδης (287-212 π.Χ.) ήταν ένας από τους μεγαλύτερους μαθηματικούς, φυσικούς και μηχανικούς της αρχαιότητας. Γεννήθηκε, έζησε και πέθανε στις Συρακούσες. Καταγόταν από ευγενή οικογένεια αλλά αρνήθηκε να πάρει οποιοδήποτε αξίωμα και προτιμούσε να ασχοληθεί με τη μάθηση και τη σπουδή. Πατέρας του ήταν ο Φειδίας και συγγενής του ο βασιλιάς των Συρακουσών, Ιέρων Α'.

Το έργο του ήταν τεράστιο και οι έρευνές του κάλυψαν πολλούς τομείς (γεωμετρία, υδραυλική, μηχανική, αρχιτεκτονική και πολιορκητική). Στην Αρχαία Ελλάδα το όνομά του συνδέθηκε με την μηχανική. Έγραψε τα πρώτα

βιβλία για την επίπεδη γεωμετρία, τη στερεομετρία, την αριθμητική, τα μαθηματικά και ανακάλυψε την αρχή του ειδικού βάρους (όταν ένα στερεό σώμα πέσει σε υγρό, χάνει τόσο βάρος όσο είναι το βάρος του όγκου που εκτοπίζει). Ο Αρχιμήδης ήταν αυτός που βγήκε απ' το λουτρό του γυμνός στο δρόμο φωνάζοντας «Εύρηκα! Εύρηκα!» τη στιγμή που βρήκε την απάντηση σε ένα θέμα που τον απασχολούσε.



Όταν άρχισαν να κυκλοφορούν στις Συρακούσες φήμες πως οι Ρωμαίοι βάδιζαν εναντίον του, ο Αρχιμήδης εφηύρε το ρωμαϊκό ζυγό, το τρίσπαστο (σωληνοειδής κοχλίας για την άντληση νερού).

Κατασκεύασε ένα υδραυλικό ρολόι που υπολόγιζε με μεγάλη ακρίβεια τις ώρες και ειδοποιούσε στην εναλλαγή της ώρας. Κατά την πολιορκία των Συρακουσών από τους Ρωμαίους οι μηχανές του Αρχιμήδη αποδείχθηκαν εξαιρετικά χρήσιμες.

Ο Αρχιμήδης μισούσε τους εισβολείς, δεν τους φοβόταν. Όταν, λοιπόν, ένας Ρωμαίος στρατιώτης μπήκε στο σπίτι του τη στιγμή που μελετούσε κάποιο γεωμετρικό πρόβλημα, ο Αρχιμήδης του είπε «**Μη μου τους κύκλους τάραττε**», δηλαδή, να μη διαταράξει τη σκέψη του, ο στρατιώτης έβγαλε το σπαθί του και τον σκότωσε.

Ο Αρχιμήδης αγαπούσε τόσο πολύ την εργασία του Περί Σφαίρας και Κυλίνδρου, ώστε είπε ότι θα ήθελε όταν πεθάνει να χαραχτεί στον τάφο του στο σχήμα μιας σφαίρας εγγεγραμμένης σε κύλινδρο. Ο κατακτητής Μάρκελλος θαύμαζε και εκτιμούσε τον Αρχιμήδη ως αντίπαλο, ώστε όταν έμαθε πως σκοτώθηκε τον έθαψε με μεγαλοπρέπεια και

έστησε στον τάφο του μια πέτρινη στήλη πάνω στην οποία ήταν σκαλισμένο το σχήμα που είχε ζητήσει. Με το πέρασμα των χρόνων ο τάφος του Αρχιμήδη άρχισε να χάνεται, όμως το 1965 σκάβοντας για τη θεμελίωση ενός ξενοδοχείου στις Συρακούσες, ο τάφος βρέθηκε και αναγνωρίστηκε από τη σκαλισμένη ταφόπετρα.

Η ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΤΟΥ ΑΡΧΙΜΗΔΗ

- Ο Αρχιμήδης ασχολήθηκε κυρίως με την μελέτη όλων των προβλημάτων των Μαθηματικών και των Μαθηματικών τεχνών, που εκκρεμούσαν από παλαιότερες μελέτες και ανακάλυψε πλήθος μεθόδων και νέων προτάσεων.

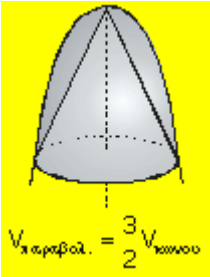
- Ο Αρχιμήδης συμπλήρωσε τις Γεωμετρικές πρακτικές εφαρμογές στη γεωμετρία του Ευκλείδη. Βρήκε μεθόδους για τον υπολογισμό εμβαδών, καμπυλόγραμμων επιπέδων, σχημάτων και όγκων που περικλείονται από καμπύλες, επιφάνειες και εφάρμοσε αυτές τις μεθόδους σε πολλές ειδικές περιπτώσεις που περιλαμβάνουν τον κύκλο, τη σφαίρα, παραβολικά τμήματα, την επιφάνεια που περιλαμβάνεται ανάμεσα σε δυο ακτίνες και δυο διαδοχικές σπείρες ενός ελικοειδούς, σφαιρικά τμήματα και τμήματα επιφανειών που παράγονται από περιστροφή ορθογωνίων κύλινδροι, τριγώνων κώνοι παραβολών παραβολοειδή, υπερβολών υπερβολοειδή) και ελλείψεων σφαιροειδή γύρω από τους βασικούς τους άξονες.

- Σημαντικότατη θεωρείται και η ανακάλυψη, από τον ίδιο, τύπου που δίνει το εμβαδόν τριγώνου από τις πλευρές του, και ακόμα η επέκτασή του στα εγγεγραμμένα τετράπλευρα.

- Σημαντικότατες για την εποχή του είναι οι μελέτες οι σχετικές με την μηχανική των στερεών και των υγρών (Κέντρα βάρους, Επιπέδων ισορροπιών, Στηρίξεων, Ανυψωτικών μηχανημάτων, Υδροστατική κ.ά.), και οι θεμελιώδεις προτάσεις των ισορροπιών και της άνωσης (Αρχή του Αρχιμήδη).

- Μία άλλη σημαντική προσφορά του σοφού μας είναι η **έκφραση των εμβαδών όλων των γνωστών κανονικών πολυγώνων** συναρτήσει της πλευράς τους. Το γεγονός αυτό μας επιτρέπει να υποθέσουμε ότι είχε εκφράσει όλα τα αντίστοιχα αποστήματα εκ των πλευρών, στηριγμένος στις κεντρικές γωνίες των πολυγώνων. Είναι λοιπόν πολύ πιθανό να διέθετε (ή να είχε συγκροτήσει) πίνακα των λόγων (απόστημα):(ημι-πλευρά), δηλαδή πίνακα εφαπτομένων

- Ο Αρχιμήδης επίσης γνώριζε να κατασκευάζει τη λύση ειδικών τριτοβάθμιων προβλημάτων, και μεταξύ αυτών και του Δηλίου προβλήματος. Τις λύσεις αυτές τις έδινε με την τομή δύο κωνικών (Ευτόκιος).



- Μοναδική είναι η προσφορά του στην ανώτερη μετρική Γεωμετρία. Συγκεκριμένα έκφρασε τους όγκους στερεών εκ περιστροφής κωνικών εφαρμόζοντας "απειροστικές" μεθόδους ανάλυσης των στερεών αυτών.

Στη σύγχρονη κλασική γεωμετρία όλο σχεδόν το μετρικό της μέρος οφείλεται στον Αρχιμήδη, με αποτέλεσμα αυτή ουσιαστικά να είναι ισορροπημένη μείξη της Ευκλείδειας και της Αρχιμήδειας αρχαίας γεωμετρίας.

Έτσι ο σοφός μας αποτελεί ουσιαστικά τον πατέρα της ανώτερης μετρικής γεωμετρίας της αρχαιότητας και ταυτόχρονα την πηγή έμπνευσης των νεώτερων μελετών του διαφορικού και απειροστικού λογισμού.

ΤΟ ΠΑΛΙΜΨΗΣΤΟ ΤΟΥ ΑΡΧΙΜΗΔΗ

Το παλίμψηστο του Αρχιμήδη είναι ένα κείμενο που περιέχει εργασίες του Αρχιμήδη. Το έγγραφο με την ονομασία *Kodex C* είναι η μόνη μέχρι σήμερα γνωστή πηγή που περιέχει μια διάσωση των πραγματειών Περί των μηχανικών θεωρημάτων, περί των επιπλεόντων σωμάτων και οστομάχιον.

Σύμφωνα με τους γραφικούς χαρακτήρες του κειμένου χρονολογείται στον 10ο αιώνα μ.Χ. και πιστεύεται ότι πρόκειται για αντιγραφή από κάποια Περιεχόμενο του παλίμψηστου.

Στα κείμενά του ο Αρχιμήδης, μεταξύ άλλων υπολογίζει το κέντρο βάρους μιας συμπαγούς σφαίρας και ενός παραβολοειδούς, μεγέθη που σήμερα υπολογίζουμε με τη χρήση ολοκληρωμάτων. Εκτός αυτού υπολόγισε το εμβαδόν της επιφάνειας που σχηματίζεται από μια παραβολή και μια τέμνουσα της παραβολής

Ο υπολογισμός του εμβαδού επιφανειών ήταν θέμα εργασιών από την αρχαιότητα. Τον 5ο αιώνα π.Χ. ο Εύδοξος είχε αναπτύξει την Μέθοδο της εξάντλησης σύμφωνα με τις ιδέες του Αντίφωνα. Κατά την μέθοδο αυτή, υποδιαιρούμε ένα σώμα σε πολύγωνα για να υπολογίσουμε το εμβαδόν του. Ο Εύδοξος ήδη είχε υπολογίσει το εμβαδόν ορισμένων πολύγωνων. Ο Αρχιμήδης βελτίωσε την μέθοδο αυτή και κατάφερε να υπολογίσει το εμβαδόν της παραβολής και υπολόγισε ότι ο αριθμός π είναι μια προσέγγιση που βρίσκεται μεταξύ 3 + 10 / 70 και 3 + 10 / 71

ΜΗΧΑΝΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΑΝΤΙΚΥΘΗΡΩΝ

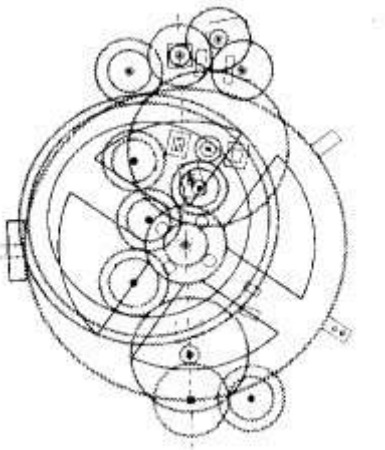
Ο **μηχανισμός των Αντικυθήρων** (γνωστός και ως **αστρολάβος των Αντικυθήρων** ή **υπολογιστής των Αντικυθήρων**) είναι ένα αρχαίο τέχνημα που πιστεύεται ότι ήταν ένας μηχανικός υπολογιστής και όργανο αστρονομικών παρατηρήσεων, που παρουσιάζει ομοιότητες με πολύπλοκο ωρολογιακό μηχανισμό.

Ανακαλύφθηκε σε ναυάγιο ανοικτά του Ελληνικού νησιού Αντικύθηρα μεταξύ των Κυθήρων και της Κρήτης. Με βάση τη μορφή των ελληνικών επιγραφών που φέρει χρονολογείται μεταξύ του 150 π.Χ. και του 100 π.Χ., αρκετά πριν από την ημερομηνία του ναυαγίου, το οποίο ενδέχεται να συνέβη ανάμεσα στο 87 π.Χ. και 63 π.Χ.. Θα μπορούσε να ήταν κατασκευασμένο μέχρι μισόν αιώνα πριν το ναυάγιο. Το ναυάγιο ανακαλύφθηκε το 1900 σε βάθος περίπου 40 με 64 μέτρων και πολλοί θησαυροί, αγάλματα και άλλα αντικείμενα, ανασύρθηκαν από Συμιακούς σφουγγαράδες και βρίσκονται σήμερα στο Εθνικό Αρχαιολογικό Μουσείο στην Αθήνα. Στις 17 Μαΐου 1902 ο αρχαιολόγος και διευθυντής του Μουσείου

Βαλέριος Στάης πρόσεξε ότι ένα από τα ευρήματα είχε έναν οδοντωτό τροχό ενσωματωμένο και εμφανείς επιγραφές με αστρονομικούς όρους.

Το αρχαίο ναυάγιο επισκέφθηκε ξανά το 1978 ο Ζακ-Υβ Κουστώ με την ομάδα του Καλυψώ προσκεκλημένοι από τον Ε.Ο.Τ. [14]. Η αποστολή του αυτή έχει γυριστεί σε ντοκιμαντέρ με τον τίτλο "Diving for Roman Plunder".

Ο μηχανισμός είναι η αρχαιότερη σωζόμενη διάταξη με γρανάζια. Είναι φτιαγμένος από μπρούντζο σε ένα ξύλινο πλαίσιο και έχει προβληματίσει και συναρπάσει πολλούς ιστορικούς της επιστήμης και της τεχνολογίας αφότου ανακαλύφθηκε. Η πιο αποδεκτή θεωρία σχετικά με τη λειτουργία του υποστηρίζει ότι ήταν ένας αναλογικός υπολογιστής σχεδιασμένος για να υπολογίζει τις κινήσεις των ουρανίων σωμάτων. Πρόσφατες λειτουργικές ανακατασκευές της συσκευής υποστηρίζουν αυτήν την ανάλυση. Από τις πρόσφατες έρευνες καταρρίφθηκε η θεωρία ότι εμπεριέχει ένα διαφορικό γρανάζι, όμως ο ανακαλυφθείς μηχανισμός της κίνησης της Σελήνης είναι ακόμα πιο εντυπωσιακός, καθότι δίνει τη δυνατότητα μεταβλητής γωνιακής ταχύτητας στον άξονα που κινεί τη Σελήνη (δεύτερος Νόμος Κέπλερ).



Ο καθηγητής Ντέρεκ ντε Σόλλα Πράις (Derek De Solla Price), φυσικός και ιστορικός της επιστήμης που εργαζόταν στο Πανεπιστήμιο του Γέηλ, δημοσίευσε ένα άρθρο για τον μηχανισμό αυτό στο περιοδικό *Scientific American* τον Ιούνιο του 1959, όταν ακόμα ο μηχανισμός δεν είχε μελετηθεί πλήρως. Το 1973 ή το 1974 δημοσίευσε τη μονογραφία του με τίτλο "Γρανάζια από τους Έλληνες", βασισμένη σε σάρωση του μηχανισμού με ακτίνες γ που πραγματοποίησε ο ακτινοφυσικός του Ε.ΚΕ.Φ.Ε. "Δημόκριτος" Χαράλαμπος Καράκαλος. Ο Πράις υποστήριξε ότι η συσκευή αυτή θα

μπορούσε να είχε κατασκευαστεί από τη Σχολή του Απολλωνίου στη Ρόδο. Τα συμπεράσματά του δεν έγιναν αποδεκτά από τους ειδικούς της εποχής, οι οποίοι πίστευαν ότι οι Αρχαίοι Έλληνες είχαν το θεωρητικό υπόβαθρο αλλά όχι και την απαιτούμενη πρακτική τεχνολογία για μια τέτοια κατασκευή.

Ο μηχανισμός αυτός έδινε, κατά την επικρατέστερη σύγχρονη άποψη, τη θέση του ήλιου και της σελήνης καθώς και τις φάσεις της σελήνης. Μπορούσε να εμφανίσει τις εκλείψεις ηλίου και σελήνης βασιζόμενος στον βαβυλωνιακό κύκλο του Σάρου. Τα καντράν του απεικόνιζαν επίσης τουλάχιστον δύο ημερολόγια, ένα ελληνικό βασισμένο στον Μετωνικό κύκλο και ένα αιγυπτιακό, που ήταν και το κοινό "επιστημονικό" ημερολόγιο της ελληνιστικής εποχής.

- Οι παλαιότερες απόψεις που έχουν παρουσιασθεί (κυρίως πριν από τον Β' Παγκόσμιο Πόλεμο) για πιθανές χρήσεις με το όργανο αυτό είναι: αστρολάβος, ή δρομόμετρο, ή αναφορικό ρολόι, ή πλανητάριο, ή αστρονομικό ναυτικό ρολόι ή πλοογνώμονας της αρχαιότητας. Όλες αυτές οι χρήσεις δεν είναι αμοιβαία αποκλειόμενες.

ΑΤΕΡΜΩΝ ΚΟΧΛΙΑΣ

Η ανακάλυψη του ατέρμονος κοχλία, κοινώς υδρόβιδας ή «*κοχλίας του Αρχιμήδη*», υπήρξε μια απλή αλλά και πολύ σημαντική εφεύρεση που συνέβαλε στην επίλυση πολλών καθημερινών πρακτικών προβλημάτων. **Εφευρέτης του συγκεκριμένου οργάνου είναι αναμφισβήτητα ο Αρχιμήδης, πολλές φιλολογικές αναφορές το πιστοποιούν, για παράδειγμα ο Μοσχίων στο έργο του «Αθηναίος, Δειπνοσοφιστές» δηλώνει ότι προκειμένου ο Αρχιμήδης να καθελκύσει την «Συρακουσία» κατασκεύασε τον ατέρμον κοχλία.**

Αφορμή για την εφεύρεση του οργάνου (όπως προαναφέρθηκε) δόθηκε στον μεγάλο μαθηματικό όταν ο τελευταίος επισκέφθηκε την Αίγυπτο μετά από πρόσκληση του Πτολεμαίου Β' του Φιλάδελφου. Εκεί εμπνεύστηκε τον κοχλία και τον κατασκεύασε στην προσπάθειά του να βοηθήσει τους χωρικούς ν' αντλήσουν νερό από το Νείλο. **Πολύ σύντομα η χρήση του κοχλία απλώθηκε σε όλη την Μεσόγειο, ακόμη και στην Εγγύς Ανατολή και διατηρήθηκε για πολλούς αιώνες χωρίς βελτιώσεις. Σε μερικές περιοχές της Βόρειας Αφρικής εξακολουθεί να χρησιμοποιείται μέχρι σήμερα, όπως π.χ στην Αίγυπτο.** Η εξάπλωση της χρήσης του κοχλία οφείλεται στο γεγονός ότι η ρωμαϊκή αυτοκρατορία με την ειρήνη που εξασφάλιζε στα εδάφη που 'χε κατακτήσει διευκόλυνε την ανταλλαγή των πληροφοριών όπως ακριβώς συνέβη και αργότερα με την

κατάκτηση των βορειοαφρικανικών ακτών και μέρους της Ευρώπης από τους Άραβες. Έτσι εξηγείται η εμφάνιση και χρήση του κοχλία μέχρι το Μεσαίωνα σε αρκετές περιοχές της Ευρώπης.

Η ονομασία «*κοχλίας*» οφείλεται στο σχέδιο, τη μορφή του οργάνου, που μοιάζει με κέλυφος σαλιγκαριού (κοχλίας). Με την ονομασία κοχλίας μεταφέρθηκε και στη λατινική γλώσσα ως *cocleacochlia*, ενώ συχνά πυκνά ονομαζόταν και «*έλιξ*» (*σπείρα*). Το όργανο αυτό το συναντάμε στους ελληνικούς παπύρους που έχουν διασωθεί, με διαφορετικές ονομασίες, όπως π.χ *όργανον, ξυλικόν όργανον, κυκλευτήριον, πήγματα, βάλανοι, κυκλευτής, ενώ οι χειριστές του αποκαλούνται οργανισταί κυκλευταί, κυκλεύοντες το όργανον*

ΕΥΡΗΚΑ !! ΕΥΡΗΚΑ !!

Η αρχαία ελληνική ρηματική φράση «**εύρηκα - εύρηκα**» (αρχαία: ηὕρηκα) είναι η πασίγνωστη ιστορική αναφώνηση του Αρχιμήδη (287 π.Χ.-212 π.Χ.) που λέγεται ότι όταν ανακάλυψε την γνωστή Αρχή περί της άνωσης τόσο πολύ είχε ενθουσιασθεί που

εξήλθε στο δρόμο γυμνός και τρέχοντας επαναλάμβανε συνεχώς αυτή τη φράση.

Η ιστορία του γεγονότος αυτού έχει ως εξής: Μία μέρα, ο βασιλιάς Ιέρων Α' των Συρακουσών παρήγγειλε στο μεγαλύτερο καλλιτέχνη της πόλης να του φτιάξει μία κορώνα από καθαρό χρυσάφι. Όταν ο βασιλιάς πήρε την κορώνα, άρχισαν να διαδίδονται φήμες πως ο καλλιτέχνης τον είχε κοροϊδέψει, παίρνοντας ένα μέρος από το χρυσάφι και αντικαθιστώντας το με άλλο μέταλλο. Ωστόσο, η τελειωμένη κορώνα είχε το ίδιο βάρος με το χρυσάφι του βασιλιά. Ο βασιλιάς κάλεσε τότε τον Αρχιμήδη να εξετάσει το ζήτημα. Στα πειράματά του, ο Αρχιμήδης βρήκε το νόμο του ειδικού βάρους. Ανακάλυψε πως όταν ένα στερεό σώμα μπει μέσα σε υγρό χάνει τόσο βάρος όσο είναι το βάρος του όγκου του νερού που εκτοπίζει.

Ο Αρχιμήδης επινόησε το σύστημα να παίρνει το ειδικό βάρος των στερεών σωμάτων. Ζύγιζε πρώτα το στερεό στον αέρα και έπειτα το ζύγιζε μέσα στο νερό. Και αφού το στερεό ζύγιζε λιγότερο μέσα στο νερό, αφαιρούσε το βάρος που είχε μέσα στο νερό από το βάρος που είχε στον αέρα. Τέλος, διαιρούσε το βάρος του στερεού σώματος στον αέρα με την απώλεια βάρους που είχε το σώμα μέσα στο νερό. Έμαθε έτσι, πως ένας δοσμένος όγκος από χρυσάφι ζυγίζει 19,3 φορές τον ίσο όγκο νερού.

Όμως, καθώς δεν μπόρεσε να προχωρήσει περισσότερο στο πρόβλημα της βασιλικής κορώνας, ο Αρχιμήδης σηκώθηκε να πάει στα λουτρά για να ξεκουραστεί. Εκεί βρήκε τη λύση. Μέσα στον ενθουσιασμό του βγήκε από το λουτρό γυμνός στο δρόμο φωνάζοντας: "*Εύρηκα! Εύρηκα!*".

Ο Αρχιμήδης γύρισε στο σπίτι του, ζύγισε την κορώνα στον αέρα και ύστερα τη ζύγισε μέσα στο νερό. Με τη μέθοδο αυτή βρήκε το ειδικό βάρος της κορώνας. Το ειδικό βάρος της δεν ήτανε 19,3. Δεν μπορούσε, λοιπόν, η κορώνα να είναι από

καθαρό χρυσάφι. Ο Αρχιμήδης απέδειξε πως ο καλλιτέχνης ήταν απατεώνας.

Σ' αυτό το ιστορικό περιστατικό αποδίδεται σήμερα όλη η ουσία της Ανακριτικής. Και μάλιστα θεωρείται η πρώτη αναμφισβήτητα προσπάθεια που έγινε για τον σκοπό της αποκάλυψης εγκλήματος με προσφυγή σε επιστημονικές γνώσεις και εν προκειμένω του Αρχιμήδη, που ενήργησε ως πραγματογνώμων.

ΕΠΙΛΟΓΟΣ

Το ταξίδι του ανθρώπου στην ιστορία είναι γεμάτο από γρίφους και μυστήρια - άλλα λυμένα, άλλα ακόμα άλυτα. Η έμφυτη ανθρώπινη περιέργεια να κατανοήσουμε, να εξηγήσουμε και πολλές φορές να υπερνικήσουμε τα «εμπόδια» που μας έθετε η φύση, μας οδήγησαν στο να αναζητήσουμε εργαλεία για να το πετύχουμε. Το σημαντικότερο εργαλείο στην προσπάθειά μας αυτή, είναι τα Μαθηματικά. Από την απλή παρατήρηση γεγονότων στη φύση, στην προσπάθεια ανάλυσης και εξήγησής τους, από την καταγραφή και την περιγραφή, μέχρι την εύρεση μεθόδων αντιμετώπισης μελλοντικών προβλημάτων, τα Μαθηματικά αποτελούν ένα από τα κύρια όπλα στην επιστημονική μας φαρέτρα, παρέχοντας στις υπόλοιπες θετικές επιστήμες (Φυσική, Χημεία κ.λπ.) το κατάλληλο υπόβαθρο.

Τοιχογραφία του Ραφαήλ που εικονίζει την Ακαδημία του Πλάτωνα. Στην αρχαιότητα είχε στην είσοδό της την επιγραφή :
" αγεωμέτρητος μηδείς εισίτω μου την στέγην ".
Στην δεξιά γωνία του πίνακα με τον διαβήτη στο χέρι εικονίζεται ο **Πυθαγόρας** να εξηγεί τα θεωρήματά του. Πρώτος κάτω αριστερά του παρακολουθεί ο **Ευκλείδης.**

" Ο άνθρωπος είναι ένα κλάσμα
που αριθμητή **έχει την** *πραγματική του αξία*
και παρονομαστή την ιδέα που έχει για τον
εαυτό του.
Ο αριθμητής παραμένει ο ίδιος
(δηλαδή η πραγματική αξία του ανθρώπου).
Γι' αυτό όσο μεγαλύτερος είναι ο παρονομαστής
(η ιδέα που έχει για τον εαυτό του) τόσο
μικρότερο είναι το κλάσμα (δηλαδή ο άνθρωπος)".

" Για να φανταστούμε τη χρησιμότητα των
μαθηματικών στη ζωή μας , αρκεί να φανταστούμε
τη ζωή μας χωρίς μαθηματικά"

Για την εκπόνηση της εργασίας συμμετείχαν οι μαθητές της Α' Τάξης :

Θαλής *Καράμπελας Χρήστος* *Μαλάκης Αντώνης* *Μαντά Αλεξάνδρα* *Μπαξεβάνης Πέτρος* *Παντελής Παναγιώτης*	***Πυθαγόρας*** *Οικονομάκης Νίκος* *Παπαδάκος Σταύρος* *Παπαστεφανής Νικήτας* *Φαραντάτος Αλέξανδρος* *Φραντζέσκου Γεωργία*
Ευκλείδης-Εύδοξος *Γεωργίου Χριστίνα* *Κανάκης Θάνος* *Λαδάς Κωσταντίνος* *Ραυτόπουλος Παναγιώτης* *Τερζή Βάσω*	***Αρχιμήδης*** *Βέγκος Γίαννης* *Καψοκόλης Λυκούργος* *Μαστροκούκος Μιχάλης* *Μαστοράκη Κέλλυ* *Μπούζας Νίκος*